1. Να γνωρίζετε αρχές ανάπτυξης των αριθμητικών συστημάτων.
2. Να γνωρίζετε δυαδικούς και αλφαριθμητικούς κώδικες.
3. Να μπορείτε να πραγματοποιείτε μετατροπές αριθμών από ένα σύστημα σε άλλο.
4. Να μπορείτε να εκτελείτε αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό και στο δεκαεξαδικό σύστημα.

2 κεφάλαιο

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΩΔΙΚΕΣ

2.1 ΑΡΧΕΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ένα αριθμητικό σύστημα είναι ένα σύνολο από ψηφία (αριθμοί και χαρακτήρες) που χρησιμοποιούνται για αρίθμηση και υπολογισμούς (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση).

Η ανάπτυξη των αριθμητικών συστημάτων βασίζεται σε δύο αρχές:

1. την ύπαρξη **βάσης** (base, radix) του συστήματος
2. την ύπαρξη αξίας - **βάρους** (weight) των θέσεων των συμβόλων

Το περισσότερο χρησιμοποιούμενο αριθμητικό σύστημα είναι το δεκαδικό (αραβικό σύστημα). Άλλα συστήματα με τα οποία και θα ασχοληθούμε είναι το δυαδικό, το οκταδικό και το δεκαεξαδικό.

2.2 ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Το δεκαδικό σύστημα χρησιμοποιεί δέκα ψηφία (τους αριθμούς 0-9), έχει βάση το 10 και η αξία των ψηφίων εξαρτάται από τις θέσεις τους (το βάρος των θέσεων υπολογίζεται από την αντίστοιχη δύναμη του 10).

Για παράδειγμα, ο αριθμός 5832 του δεκαδικού συστήματος παριστάνει μία ποσότητα που είναι ίση με 5 χιλιάδες συν 8 εκατοντάδες συν 3 δεκάδες συν 2 μονάδες, αφού:

$$5832 = 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Το πρώτο ψηφίο του αριθμού είναι το Περισσότερο Σημαντικό Ψηφίο (Most Significant Digit - **MSD**), γιατί έχει την μεγαλύτερη αξία, ενώ το τελευταίο ψηφίο είναι το Λιγότερο Σημαντικό Ψηφίο (Least Significant Digit - **LSD**), γιατί έχει την μικρότερη αξία.

Από τις θέσεις των ψηφίων προκύπτουν τα βάρη τους (οι αντίστοιχες δυνάμεις του 10), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.1.

	MSD			LSD
Ψηφία	5	8	3	2
Θέση	3	2	1	0
Βάρος	10^3	10^2	10^1	10^0
Αξία	$5\times10^3=5000$	$8\times10^2=800$	$3\times10^1=30$	$2\times10^0=2$

Σχήμα 2.2.1 *Βάρη θέσεων δεκαδικού αριθμού*

Κάθε αριθμός εκφρασμένος σε αριθμητικό σύστημα με βάση (radix) το r παριστάνεται με μία σειρά από ψηφία οι τιμές των οποίων κυμαίνονται από 0 μέχρι r-1, δηλαδή:

$$(A)_r = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός (αριθμητικό σύστημα με βάση το 10) είναι:

$$(A)_{10} = a_n x r^n + a_{n-1} x r^{n-1} + \ldots + a_2 x r^2 + a_1 x r^1 + a_0 x r^0$$

2.3 ΔΥΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

2.3.1 Ορισμοί

Το δυαδικό σύστημα έχει βάση τον αριθμό 2. Επομένως, χρησιμοποιεί τα ψηφία 0 και 1. Κάθε δυαδικός αριθμός παριστάνεται από μία σειρά από τέτοια ψηφία που ονομάζονται δυαδικά ψηφία (bits). Από τις θέσεις των ψηφίων προκύπτουν τα βάρη τους (οι αντίστοιχες δυνάμεις του 2). Το πρώτο ψηφίο του αριθμού είναι το Περισσότερο Σημαντικό Δυαδικό Ψηφίο (Most Significant Bit - **MSB**), γιατί έχει την μεγαλύτερη αξία, ενώ το τελευταίο ψηφίο είναι το Λιγότερο Σημαντικό Δυαδικό Ψηφίο (Least Significant Bit - **LSB**), γιατί έχει την μικρότερη αξία.

	MSB			LSB
Ψηφία	1	0	1	1
Θέση	3	2	1	0
Βάρος	2^3	2^2	2^1	2^0

Σχήμα 2.3.1 *Βάρη θέσεων δυαδικού αριθμού*

Για παράδειγμα, τα βάρη των θέσεων του δυαδικού αριθμού 1011 φαίνονται στο Σχήμα 2.3.1.

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι:

$$1011 = 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = 8+0+2+1=11$$

2.3.2 Αρίθμηση στο δυαδικό σύστημα

Στο δεκαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας n ψηφία μπορούμε να μετρήσουμε 10^n αριθμούς (από το 0 μέχρι και το 10^n -1).

Για παράδειγμα με 1 ψηφίο μπορούμε να μετρήσουμε τους αριθμούς 0-9, με δύο ψηφία τους αριθμούς 0-99, με τρία ψηφία τους αριθμούς 0-999.

Αντίστοιχα, στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας n ψηφία (bits) μπορούμε να μετρήσουμε 2^n αριθμούς (από το 0 μέχρι και το 2^n -1).

Για παράδειγμα με 1 ψηφίο μπορούμε να μετρήσουμε τους αριθμούς 0-1, με δύο ψηφία τους αριθμούς 0-3, με τρία ψηφία τους αριθμούς 0-7, με τέσσερα ψηφία τους αριθμούς 0-15.

Η ακολουθία δυαδικής αρίθμησης, χρησιμοποιώντας τέσσερα ψηφία (bits) παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.3.1, από όπου προκύπτει ότι:

το λιγότερο σημαντικό bit (LSB - τελευταία στήλη) αλλάζει (από 0 σε 1 και από 1 σε 0) σε κάθε βήμα αρίθμησης, το αμέσως προηγούμενο bit αλλάζει κάθε δύο βήματα αρίθμησης, το αμέσως προηγούμενο bit αλλάζει κάθε τέσσερα βήματα αρίθμησης και το περισσότερο σημαντικό bit (MSB) αλλάζει κάθε οκτώ βήματα.

Αυτή η παρατήρηση αποτελεί έναν εύκολο μνημονικό κανόνα για να θυμάστε την ακολουθία δυαδικής αρίθμησης.

Πίνακας 2.3.1 Δυαδική αρίθμηση

Δεκαδικό Βάση 10	Δυαδικό Βάση 2
00	0000
01	0001
02	0010
03	0011
04	0100
05	0101
06	0110
07	0111
08	1000
09	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

2.3.3 Μετατροπή δυαδικού σε δεκαδικό

Για τη μετατροπή του δυαδικού αριθμού

$$(A)_2 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

σε δεκαδικό αριθμό χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$$(A)_{10} = a_n x2^n + a_{n-1} x2^{n-1} + \ldots + a_2 x2^2 + a_1 x2^1 + a_0 x2^0$$

Για παράδειγμα, ο δυαδικός αριθμός $(1110)_2$ αντιστοιχεί στον δεκαδικό αριθμό $(14)_{10}$

αφού: $(1110)_2 = 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = 1x8 + 1x4 + 1x2 + 0x1 = (14)_{10}$

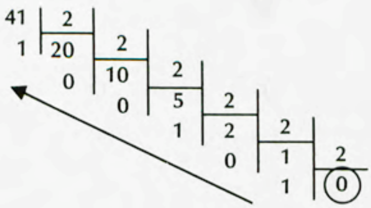
2.3.4 Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό

Για τη μετατροπή ενός ακέραιου δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό αριθμό χρησιμοποιείται η ακόλουθη διαδικασία:

Ο δεκαδικός αριθμός διαιρείται δια του 2, οπότε προκύπτει ακέραιο πηλίκο και υπόλοιπο (που είναι 0 ή 1). Το πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης διαιρείται εκ νέου δια του 2, οπότε προκύπτει νέο ακέραιο πηλίκο και νέο υπόλοιπο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να προκύψει πηλίκο ίσο με 0. Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων αποτελούν τα ψηφία του ακέραιου μέρους του δυαδικού αριθμού με LSB, το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης και MSB το υπόλοιπο της τελευταίας διαίρεσης.

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός $(41)_{10}$ αντιστοιχεί στο δυαδικό αριθμό $(101001)_2$ αφού:

$(41)_{10} = (101001)_2$



2.4 ΟΚΤΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

2.4.1 Ορισμοί

Το οκταδικό σύστημα έχει βάση τον αριθμό 8. Επομένως, χρησιμοποιεί τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7. Κάθε οκταδικός αριθμός παριστάνεται από μία σειρά από τέτοια ψηφία. Από τις θέσεις των ψηφίων προκύπτουν τα βάρη τους (οι αντίστοιχες δυνάμεις του 8). Το πρώτο ψηφίο του αριθμού ονομάζεται Περισσότερο Σημαντικό Ψηφίο (Most Significant Digit - **MSD**), ενώ το τελευταίο ψηφίο ονομάζεται Λιγότερο Σημαντικό Ψηφίο (Least Significant Digit - **LSD**).

	MSB		LSB
Ψηφία	4	5	2
Θέση	2	1	0
Βάρος	8^2	8^1	8^0

Σχήμα 2.4.1 *Βάρη θέσεων οκταδικού αριθμού*

Για παράδειγμα, τα βάρη των θέσεων του οκταδικού αριθμού 452 φαίνονται στο Σχήμα 2.4.1.

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι:

$452 = 4x8^2 + 5x8^1 + 2x8^0 = 298$

2.4.2 Αρίθμηση στο οκταδικό σύστημα

Στο οκταδικό σύστημα, χρησιμοποιώντας n ψηφία μπορούμε να μετρήσουμε 8^n αριθμούς (από το 0 μέχρι και το 8^n -1).

Για παράδειγμα, με 1 ψηφίο μπορούμε να μετρήσουμε τους αριθμούς 0-7, με δύο ψηφία τους αριθμούς 0-63, με τρία ψηφία τους αριθμούς 0-511, με τέσσερα ψηφία τους αριθμούς 0-4095.

Η ακολουθία οκταδικής αρίθμησης παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.4.1.

Πίνακας 2.4.1 *Οκταδική αρίθμηση*

Δεκαδικό Βάση 10	Οκταδικό Βάση 8
00	00
01	01
02	02
03	03
04	04
05	05
06	06
07	07
08	10
09	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17

2.4.3 Μετατροπή οκταδικού σε δεκαδικό

Για τη μετατροπή του οκταδικού αριθμού

$$(A)_8 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

σε δεκαδικό αριθμό χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$$(A)_{10} = a_n x 8^n + a_{n-1} x 8^{n-1} + \ldots + a_2 x 8^2 + a_1 x 8^1 + a_0 x 8^0$$

Για παράδειγμα, ο οκταδικός αριθμός $(372)_8$ αντιστοιχεί στο δεκαδικό αριθμό $(14)_{10}$ αφού:

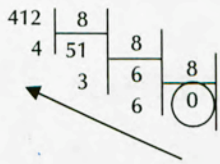
$(372)_8 = 3x8^2 + 7x8^1 + 2x8^0 = 3x64 + 7x8 + 2x1 = (250)_{10}$

2.4.4 Μετατροπή δεκαδικού σε οκταδικό

Για τη μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε οκταδικό αριθμό χρησιμοποιείται η μέθοδος διαδοχικών διαιρέσεων δια του 8 (η διαδικασία είναι ανάλογη με τη διαδικασία για μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό αριθμό).

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός $(412)_{10}$ αντιστοιχεί στον οκταδικό αριθμό $(634)_8$ αφού:

$(412)_{10} = (634)_8$



2.4.5 Μετατροπή οκταδικού σε δυαδικό

Για τη μετατροπή ενός οκταδικού αριθμού σε δυαδικό αριθμό μετατρέπεται κάθε ψηφίο του οκταδικού αριθμού σε μία ομάδα **τριών** (3) δυαδικών ψηφίων, επειδή με τρία δυαδικά ψηφία μπορούν να αναπαρασταθούν όλα τα ψηφία του οκταδικού συστήματος.

Η αντιστοιχία των οκτώ πιθανών ψηφίων ενός οκταδικού αριθμού με τις οκτώ τριάδες bits φαίνεται στον Πίνακα 2.4.2.

Πίνακας 2.4.2 *Η αντιστοιχία των οκτώ ψηφίων ενός οκταδικού αριθμού με τις οκτώ τριάδες bits*

7	6	5	4	3	2	1	0
111	110	101	100	011	010	001	000

Για παράδειγμα, ο οκταδικός αριθμός $(3764)_8$ αντιστοιχεί στον δυαδικό αριθμό $(011111110100)_2$ αφού:

$(3764)_8=(011111110100)_2$

3	7	6	4
011	111	110	100

2.4.6 Μετατροπή δυαδικού σε οκταδικό

Για τη μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού σε οκταδικό αριθμό, χωρίζεται ο δυαδικός αριθμός σε ομάδες **τριών** (3) bits και κάθε ομάδα μετατρέπεται στο ισοδύναμο οκταδικό ψηφίο (δηλαδή ακολουθείται η αντίστροφη διαδικασία από την διαδικασία μετατροπής ενός οκταδικού αριθμού σε δυαδικό αριθμό). Αν ο δυαδικός αριθμός δε χωρίζεται ακριβώς σε τριάδες bits, τότε προστίθενται όσα "0" απαιτούνται στα αριστερά του MSB του δυαδικού αριθμού (γιατί αυτό δεν επηρεάζει τον αριθμό) ώστε να δημιουργηθεί η τελευταία τριάδα bits.

Για παράδειγμα, ο δυαδικός αριθμός $(10101001)_2$ αντιστοιχεί στον οκταδικό αριθμό $(251)_8$ αφού:

$(10101001)_2=(251)_8$

010	101	001
2	5	1

2.5 ΔΕΚΑΕΞΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

2.5.1 Ορισμοί

Το δεκαεξαδικό σύστημα έχει βάση τον αριθμό 16. Επομένως, χρησιμοποιεί 16 ψηφία που είναι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 και τα γράμματα A, B, C, D, E και F. Κάθε δεκαεξαδικός αριθμός παριστάνεται από μία σειρά από τέτοια ψηφία. Από τις θέσεις των ψηφίων προκύπτουν τα βάρη τους (οι αντίστοιχες δυνάμεις του 16). Το πρώτο ψηφίο του αριθμού ονομάζεται Περισσότερο Σημαντικό Ψηφίο (Most Significant Digit - **MSD**), ενώ το τελευταίο ψηφίο ονομάζεται Λιγότερο Σημαντικό Ψηφίο (Least Significant Digit - **LSD**).

	MSB		LSB
Ψηφία	8	F	9
Θέση	2	1	0
Βάρος	16^2	16^1	16^0

Σχήμα 2.5.1 Βάρη θέσεων δεκαεξαδικού αριθμού

Για παράδειγμα, τα βάρη των θέσεων του δεκαεξαδικού αριθμού 8F9 φαίνονται στο Σχήμα 2.5.1.

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι:

$8F9 = 8x16^2 + 15x16^1 + 9x16^0 = 2297$

2.5.2 Αρίθμηση στο δεκαεξαδικό σύστημα

Στο δεκαεξαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας n ψηφία μπορούμε να μετρήσουμε 16^n αριθμούς (από το 0 μέχρι και το 16^n -1).

Για παράδειγμα, με 1 ψηφίο μπορούμε να μετρήσουμε τους αριθμούς 0-15, με δύο ψηφία τους αριθμούς 0-255, με τρία ψηφία τους αριθμούς 0-4095, με τέσσερα ψηφία τους αριθμούς 0-65535.

Η ακολουθία δεκαεξαδικής αρίθμησης παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.5.1.

Πίνακας 2.5.1
Δεκαεξαδική αρίθμηση

Δεκαδικό Βάση 10	Δεκαεξαδικό Βάση 16
00	0
01	1
02	2
03	3
04	4
05	5
06	6
07	7
08	8
09	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F
16	10
17	11
18	12
...	...
31	1F
32	20

2.5.3 Μετατροπή δεκαεξαδικού σε δεκαδικό

Για τη μετατροπή του δεκαεξαδικού αριθμού

$$(A)_{16}=a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

σε δεκαδικό αριθμό χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$$(A)_{10} = a_n x16^n + a_{n-1} x16^{n-1} + \ldots + a_2 x16^2 + a_1 x16^1 + a_0 x16^0$$

Για παράδειγμα, ο δεκαεξαδικός αριθμός $(B5D)_{16}$ αντιστοιχεί στον δεκαδικό αριθμό $(2909)_{10}$ αφού:

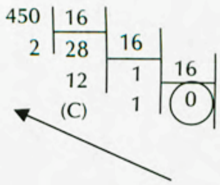
$(B5D)_{16}=11x16^2+5x16^1+13x16^0=11x256+5x16+13x1=(2909)_{10}$

2.5.4 Μετατροπή δεκαδικού σε δεκαεξαδικό

Για τη μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε δεκαεξαδικό αριθμό χρησιμοποιείται η μέθοδος διαδοχικών διαιρέσεων δια του 16 (η διαδικασία είναι ανάλογη με τη διαδικασία για μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό αριθμό).

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός $(450)_{10}$ αντιστοιχεί στον δεκαεξαδικό αριθμό $(1C2)_{16}$ αφού:

$(450)_{10}=(1C2)_{16}$



2.5.5 Μετατροπή δεκαεξαδικού σε δυαδικό

Για τη μετατροπή ενός δεκαεξαδικού αριθμού σε δυαδικό αριθμό μετατρέπεται κάθε ψηφίο του δεκαεξαδικού αριθμού σε μία ομάδα **τεσσάρων** (4) δυαδικών ψηφίων επειδή με τέσσερα δυαδικά ψηφία μπορούν να αναπαρασταθούν όλα τα ψηφία του δεκαεξαδικού συστήματος.

Η αντιστοιχία των δεκαέξι πιθανών ψηφίων ενός δεκαεξαδικού αριθμού με τις δεκαέξι τετράδες bits φαίνεται στον Πίνακα 2.5.2.

Πίνακας 2.5.2 Η αντιστοιχία των δεκαέξι ψηφίων ενός δεκαεξαδικού αριθμού με τις δεκαέξι τετράδες bits

7	6	5	4	3	2	1	0
0111	0110	0101	0100	0011	0110	0001	0000
F	E	D	C	B	A	9	8
1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000

Για παράδειγμα, ο δεκαεξαδικός αριθμός $(9E64)_{16}$ αντιστοιχεί στον δυαδικό αριθμό $(1001111001100100)_2$ αφού:

$(9E64)_{16}=(1001111001100100)_2$

9	E	6	4
1001	1110	0110	0100

2.5.6 Μετατροπή δυαδικού σε δεκαεξαδικό

Για τη μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού σε δεκαεξαδικό αριθμό χωρίζεται ο δυαδικός αριθμός σε ομάδες **τεσσάρων** (4) bits και κάθε ομάδα μετατρέπεται στο ισοδύναμο δεκαεξαδικό ψηφίο. Αν ο δυαδικός αριθμός δε χωρίζεται ακριβώς σε τετράδες bits, τότε προστίθενται όσα "0" απαιτούνται στα αριστερά του MSB του δυαδικού, ώστε να δημιουργηθεί η τελευταία τετράδα bits.

Για παράδειγμα, ο δυαδικός αριθμός $(0010111101010001)_2$ αντιστοιχεί στο δεκαεξαδικό αριθμό $(2F51)_{16}$ αφού:

$(0010111101010001)_2=(2F51)_{16}$

0010	1111	0101	0001
2	F	5	1

2.5.7 Μετατροπή δεκαεξαδικού σε οκταδικό

Για τη μετατροπή ενός δεκαεξαδικού αριθμού σε οκταδικό αριθμό, μετατρέπεται ο δεκαεξαδικός αριθμός σε δυαδικό αριθμό που με την σειρά του μετατρέπεται σε οκταδικό αριθμό.

Για παράδειγμα, ο δεκαεξαδικός αριθμός $(A35)_{16}$ αντιστοιχεί στο οκταδικό αριθμό $(5065)_8$ αφού:

$(A35)_{16}=(5065)_8$

A 3 5
1010 0011 0101
101 000 110 101
5 0 6 5

2.5.8 Μετατροπή οκταδικού σε δεκαεξαδικό

Για τη μετατροπή ενός οκταδικού αριθμού σε δεκαεξαδικό αριθμό, μετατρέπεται ο οκταδικός αριθμός σε δυαδικό αριθμό που με τη σειρά του μετατρέπεται σε δεκαεξαδικό αριθμό.

Για παράδειγμα, ο οκταδικός αριθμός $(7501)_8$ αντιστοιχεί στο δεκαεξαδικό αριθμό $(F41)_{16}$ αφού:

$(7501)_8=(F41)_{16}$

7	5	0	1
111	101	000	001

1111	0100	0001
F	4	1

2.6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

2.6.1 Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα

2.6.1.1 Πρόσθεση δυαδικών αριθμών

Το άθροισμα δύο δυαδικών αριθμών υπολογίζεται με ανάλογη διαδικασία του υπολογισμού του αθροίσματος δύο δεκαδικών αριθμών: η πρόσθεση ξεκινάει από τα LSB προς τα MSB των προσθετέων, κάθε bit του αθροίσματος είναι "0" ή "1" και το κρατούμενο κάθε θέσης προστίθεται στα bits των προσθετέων της επόμενης θέσης.

Οι μνημονικοί κανόνες της δυαδικής πρόσθεσης είναι:

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+0=1$

$1+1=10$ (άθροισμα 0 και κρατούμενο 1)

Παρατήρηση: Το σύμβολο + που χρησιμοποιείται στην πρόσθεση έχει σαφώς διαφορετική σημασία από το σύμβολο + που χρησιμοποιείται στη λογική πράξη OR.

Για παράδειγμα, παρουσιάζεται η δυαδική πρόσθεση:

$(1001)_2+(1100)_2=(10101)_2$

Κρατούμενο		1			
		1	0	0	1
	+	1	1	0	0
	1	0	1	0	1

Η αντίστοιχη δεκαδική πρόσθεση είναι:

$(9)_{10}+(12)_{10}=(21)_{10}$

2.6.1.2 Αφαίρεση δυαδικών αριθμών

Η διαφορά δύο δυαδικών αριθμών υπολογίζεται με ανάλογη διαδικασία του υπολογισμού της διαφοράς δύο δεκαδικών αριθμών: η αφαίρεση ξεκινάει από τα LSB προς τα MSB του μειωτέου και του αφαιρετέου.

Οι μνημονικοί κανόνες της δυαδικής αφαίρεσης είναι:

0-0=0

0-1=11 (διαφορά 1 και δανεικό 1)

1-0=1

1-1=0

Για παράδειγμα, παρουσιάζεται η δυαδική αφαίρεση:

$(1001)_2-(0100)_2=(0101)_2$

Δανεικό	1			
	1	0	0	1
–	0	1	0	0
	0	1	0	1

Η αντίστοιχη δεκαδική αφαίρεση είναι:

$(9)_{10}-(4)_{10}=(5)_{10}$

2.6.2 Αριθμητικές πράξεις στο δεκαεξαδικό σύστημα

Οι δεκαεξαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην Πληροφορική, όπως για παράδειγμα στην αρίθμηση των διευθύνσεων μνήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών ή στον προγραμματισμό των μικροϋπολογιστών σε γλώσσα μηχανής. Επομένως, είναι χρήσιμη η γνώση της εκτέλεσης των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δεκαεξαδικών αριθμών.

2.6.2.1 Πρόσθεση δεκαεξαδικών αριθμών

Το άθροισμα δύο δεκαεξαδικών αριθμών υπολογίζεται με την ακόλουθη διαδικασία:

Η πρόσθεση ξεκινάει από τα LSD προς τα MSD των προσθετέων. Τα ψηφία των δεκαεξαδικών αριθμών προστίθενται σε κάθε θέση, όπως προστίθενται οι δεκαδικοί αριθμοί.

- ✔ Αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από 15 ή ίσο με 15, τότε το άθροισμα είναι το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο.

- ✔ Αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από 15, τότε το άθροισμα είναι το δεκαεξαδικό ψηφίο που αντιστοιχεί στην διαφορά του αποτελέσματος μείον 16 και μεταφέρεται κρατούμενο 1 στην επόμενη θέση.

Για παράδειγμα, παρουσιάζεται η δεκαεξαδική πρόσθεση:
$(EB98)_{16}+(4F31)_{16}=(13AC9)_{16}$

Κρατούμενο	1			
	E	B	9	8
+	4	F	3	1
1	3	A	C	9

Η αντίστοιχη δεκαδική πρόσθεση είναι:
$(60312)_{10}+(20273)_{10}=(80585)_{10}$

2.6.2.2 Αφαίρεση δεκαεξαδικών αριθμών

Η διαφορά δύο δεκαεξαδικών αριθμών υπολογίζεται με την ακόλουθη διαδικασία:

Η αφαίρεση ξεκινάει από τα LSD προς τα MSD του μειωτέου και του αφαιρετέου.

- ✔ Αν σε κάθε θέση το ψηφίο του μειωτέου είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με το ψηφίο του αφαιρετέου, τότε τα ψηφία των δεκαεξαδικών αριθμών αφαιρούνται, όπως αφαιρούνται οι δεκαδικοί αριθμοί. Η διαφορά είναι το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο.
- ✔ Αν σε κάθε θέση το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο του αφαιρετέου, τότε μεταφέρεται δανεικό 1 από την επόμενη θέση (το δεκαεξαδικό ψηφίο της επόμενης θέσης μειώνεται κατά 1). Στο ψηφίο του μειωτέου προστίθεται το 16 και από αυτό το άθροισμα αφαιρείται το ψηφίο του αφαιρετέου. Η διαφορά είναι το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο του αποτελέσματος αυτής της αφαίρεσης.

Για παράδειγμα, παρουσιάζεται η δεκαεξαδική αφαίρεση:
$(62C8)_{16}-(2E13)_{16}=(34B5)_{16}$

	5	18		
	~~6~~	~~2~~	C	8
-	2	E	1	3
	3	4	B	5

Η αντίστοιχη δεκαδική αφαίρεση είναι:
$(25288)_{10}-(11795)_{10}=(13493)_{10}$

2.7 ΚΩΔΙΚΕΣ

2.7.1 Δυαδικοί κώδικες

Ο άνθρωπος χρησιμοποιεί τη δεκαδική λογική. Αντίθετα, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές λειτουργούν με βάση τη δυαδική λογική. Είναι προφανές ότι υπάρχει πρόβλημα επικοινωνίας του χρήστη με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ο χρήστης εισάγει δεδομένα σε δεκαδική μορφή. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής επεξεργάζεται τα δεδομένα σε δυαδική μορφή. Επομένως, απαιτείται η κατάλληλη μετατροπή των πληροφοριών που ονομάζεται **κωδικοποίηση**. **Κώδικας** είναι ένας συστηματικός τρόπος παράστασης πληροφοριών.

Τα ηλεκτρονικά ψηφιακά συστήματα χρησιμοποιούν σήματα που έχουν δύο διακριτές τιμές. Όμως, τα ψηφιακά συστήματα αναπαριστούν και χειρίζονται πολλά διακριτά στοιχεία πληροφορίας και όχι μόνο δυαδικές πληροφορίες. Κάθε διακριτό στοιχείο πληροφορίας μπορεί να παρασταθεί με έναν δυαδικό κώδικα. **Δυαδικός κώδικας** είναι ένας συστηματικός τρόπος παράστασης πληροφοριών σε δυαδική μορφή.

Οι δυαδικοί κώδικες χρησιμοποιούν το δυαδικό ψηφίο (binary digit - bit) με δύο πιθανές τιμές "0" και "1". Με έναν δυαδικό κώδικα που χρησιμοποιεί n bits μπορούν να παρασταθούν το πολύ 2^n διακεκριμένα στοιχεία πληροφορίας, αφού τα n bits μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά με 2^n διαφορετικούς τρόπους (συνδυασμοί).

Τέσσερα στοιχεία μπορούν να παρασταθούν με έναν δυαδικό κώδικα των 2 bits. Κάθε στοιχείο παριστάνεται με έναν από τους τέσσερις τρόπους που μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά αυτά τα 2 bits: 00, 01, 10 και 11. Για παράδειγμα, οι τέσσερις εποχές του χρόνου θα μπορούσαν να παρασταθούν ως εξής:

Άνοιξη	↔	00
Καλοκαίρι	↔	01
Φθινόπωρο	↔	10
Χειμώνας	↔	11

Η παραπάνω αντιστοιχία των εποχών με δυαδικούς αριθμούς είναι ένας δυαδικός κώδικας. Η αντιστοιχία αυτή δεν είναι μοναδική και επιλέγεται ανάλογα με την εφαρμογή.

Αν το πλήθος των στοιχείων που πρόκειται να κωδικοποιηθούν δεν είναι δύναμη του 2, τότε μερικοί από τους συνδυασμούς των bits δε χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα, τα 10 ψηφία του δεκαδικού συστήματος μπορούν να παρασταθούν με έναν δυαδικό κώδικα των 4 bits. Με 4 bits, όμως, μπορούν να αναπτυχθούν 16 συνδυασμοί. Επομένως, δε χρησιμοποιούνται 6 συνδυασμοί.

Οι δυαδικοί κώδικες ανήκουν στις δύο ακόλουθες κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους:

- **δυαδικοί κώδικες με βάρη**
- **δυαδικοί κώδικες χωρίς βάρη**

2.7.2 Δυαδικοί κώδικες με βάρη

Οι δυαδικοί κώδικες με βάρη κατασκευάζονται με τέτοιον τρόπο ώστε στη θέση κάθε bit του κώδικα να αντιστοιχεί ένα βάρος (κάθε θέση έχει μία αξία).

Οι ακόλουθοι δυαδικοί κώδικες με βάρη στα bits ανάλογα με τη θέση τους, χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος:

– ο BCD κώδικας
που χρησιμοποιεί 4 bits με βάρη 8 4 2 1
– ο κώδικας με βάρη 7 4 2 1
που χρησιμοποιεί 4 bits με βάρη 7 4 2 1
– ο Biquinary κώδικας
που χρησιμοποιεί 7 bits με βάρη 5 0 4 3 2 1 0

2.7.2.1 Ο Κώδικας BCD

Πίνακας 2.7.1
Κώδικας BCD

Δεκαδικό ψηφίο	BCD 8421
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Ο κώδικας BCD είναι δυαδικός κώδικας με βάρη, που χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος, όπως δηλώνει άλλωστε το όνομά του: Binary Coded Decimal (δυαδικά κωδικοποιημένο δεκαδικό).

Ο κώδικας BCD χρησιμοποιεί 4 bits με βάρη 8 4 2 1 και παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.7.1.

Ο κώδικας BCD είναι ένας τρόπος παράστασης των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος, το κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μία τετράδα bits.

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός 5 αντιστοιχεί στην τετράδα 0101 (0x8+1x4+ +0x2+1x1=5).

2.7.2.2 Μετατροπή από BCD σε δεκαδικό

Για τη μετατροπή ενός BCD αριθμού σε δεκαδικό αριθμό χωρίζεται ο BCD αριθμός σε ομάδες **τεσσάρων** (4) bits και κάθε ομάδα μετατρέπεται στο ισοδύναμο δεκαδικό ψηφίο, σύμφωνα με τον Πίνακα 2.7.1.

Για παράδειγμα, ο BCD αριθμός 1000011000101001 αντιστοιχεί στο δεκαδικό αριθμό 8629 αφού:

1000	0110	0010	1001
8	6	2	9

Παρατήρηση: Ο κώδικας BCD χρησιμοποιεί τους 10 από τους 16 δυνατούς συνδυασμούς των 4 bits. Οι 6 συνδυασμοί 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 και 1111 δε χρησιμοποιούνται.

2.7.2.3 Μετατροπή από δεκαδικό σε BCD

Για τη μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε BCD αριθμό, μετατρέπεται κάθε ψηφίο του δεκαδικού αριθμού σε μία ομάδα **τεσσάρων** (4) bits που αποτελούν τον ισοδύναμο BCD αριθμό του κάθε δεκαδικού ψηφίου, σύμφωνα με τον Πίνακα 2.7.1.

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός 4638 αντιστοιχεί στον BCD αριθμό 0100011000111000 αφού:

4	6	3	8
0100	0110	0011	1000

2.7.2.4 Αριθμοί του κώδικα BCD και δυαδικοί αριθμοί

Ο κώδικας BCD δεν είναι ένα άλλο αριθμητικό σύστημα (όπως το δεκαδικό, το δυαδικό, το οκταδικό, το δεκαεξαδικό), αλλά είναι ένας τρόπος παράστασης των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος, το κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μία τετράδα bits.

Επομένως, είναι σημαντική η διαφορά ανάμεσα στη δυαδική κωδικοποίηση ενός δεκαδικού αριθμού και στη μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα.

Ο κώδικας BCD είναι ένας άμεσος δυαδικός μετατροπέας μόνο για τους δεκαδικούς αριθμούς 0-9. Για τους δεκαδικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από 9, η κωδικοποίηση και η μετατροπή είναι διαφορετικές.

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός 253 αντιστοιχεί:

– στον 12-bits BCD αριθμό 001001010011

– στον 8-bits δυαδικό αριθμό 11111101

2.7.3 Δυαδικοί κώδικες χωρίς βάρη

2.7.3.1 Ορισμοί

Στους δυαδικούς κώδικες χωρίς βάρη η θέση κάθε bit του κώδικα δεν αντιστοιχεί κάποιο βάρος, όπως γίνεται στους δυαδικούς κώδικες με βάρη. Αυτοί οι κώδικες προκύπτουν από κάποιον κανόνα.

Τέτοιοι δυαδικοί κώδικες χωρίς βάρη είναι οι ακόλουθοι:

- ο κώδικας Gray
- ο κώδικας υπερβολής κατά 3 (excess-3)

2.7.3.2 Ο κώδικας GRAY

Ο κώδικας Gray είναι δυαδικός κώδικας χωρίς βάρη που χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των δεκαδικών αριθμών (όχι μόνο των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος, όπως γίνεται στον κώδικα BCD).

Πίνακας 2.7.2
Κώδικας Gray

Δεκαδικός Αριθμός	Gray
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

Ο κώδικας Gray που χρησιμοποιεί 4 bits (κωδικοποίηση των 16 πρώτων δεκαδικών αριθμών 0-15) παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.7.2.

Ο κώδικας Gray ονομάζεται κατοπτρικός κώδικας, λόγω του τρόπου κατασκευής του. Στον Πίνακα 2.7.2 φαίνεται ότι:

Η πρώτη στήλη από δεξιά (LSB) ξεκινάει πρώτα με ένα "0" και μετά με ένα "1". Αυτά είναι τα 2 πρώτα κατακόρυφα bits. Τα επόμενα 2 κατακόρυφα bits είναι κατοπτρικά των 2 πρώτων bits (υπάρχει συμμετρία ως προς τη μέση τους). Έτσι, δημιουργούνται 4 bits. Τα επόμενα 4 κατακόρυφα bits είναι κατοπτρικά των 4 πρώτων bits. Έτσι, δημιουργούνται 8 bits. Τα επόμενα 8 bits είναι κατοπτρικά των 8 πρώτων bits.

Η δεύτερη στήλη από δεξιά ξεκινάει πρώτα με δύο "0" και μετά με δύο "1". Τα επόμενα 4 bits είναι κατοπτρικά των 4 πρώτων bits. Έτσι, δημιουργούνται 8 bits. Τα επόμενα 8 bits είναι κατοπτρικά των 8 πρώτων bits.

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται και στις επόμενες στήλες. Η τρίτη στήλη από δεξιά ξεκινάει πρώτα με τέσσερα "0" και μετά με τέσσερα "1" και είναι κατοπτρική ως προς το μέσον της. Η τέταρτη στήλη από δεξιά ξεκινάει πρώτα με οκτώ "0" και μετά με οκτώ "1".

Ο κώδικας Gray έχει το εξής σημαντικό χαρακτηριστικό: **στον κώδικα Gray αλλάζει ένα μόνο bit μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών**. Για παράδειγμα, οι διαδοχικοί αριθμοί 5 και 6 του κώδικα Gray είναι 0111 και 0101, αντίστοιχα, δηλαδή αλλάζει μόνο το δεύτερο bit από δεξιά. Επίσης, οι διαδοχικοί αριθμοί 7 και 8 του κώδικα Gray είναι 0100 και 1100, αντίστοιχα, δηλαδή αλλάζει μόνο το τέταρτο bit από δεξιά. Αυτό δε συμβαίνει στο δυαδικό σύστημα. Οι διαδοχικοί αριθμοί 5 και 6 στο δυαδικό σύστημα είναι 0101 και 0110, αντίστοιχα, δηλαδή αλλάζουν τα 2 bits από δεξιά. Επίσης, οι διαδοχικοί αριθμοί 7 και 8 στο δυαδικό σύστημα είναι 0111 και 1000, αντίστοιχα, δηλαδή αλλάζουν και τα 4 bits.

Αν χρησιμοποιούνται δυαδικοί αριθμοί για τη μετάβαση από έναν αριθμό στον επόμενο, τότε υπάρχει η πιθανότητα σφάλματος: η μετάβαση από το 0111 (7) στο 1000 (8) μπορεί να οδηγήσει (για μικρό χρονικό διάστημα) στο 0110 (4) αν το LSB αλλάζει γρηγορότερα από τα άλλα bits, με αποτέλεσμα να γίνει λάθος στη μετατροπή. Αν χρησιμοποιείται ο κώδικας Gray για τη μετάβαση από έναν αριθμό στον επόμενο, τότε η πιθανότητα σφάλματος εξαλείφεται: η μετάβαση από το 0100 (7) στο 1100 (8) επιτυγχάνεται με την αλλαγή ενός (1) μόνο bit.

2.7.4 Αλφαριθμητικοί κώδικες

2.7.4.1 Ορισμοί

Πολλές εφαρμογές των ηλεκτρονικών υπολογιστών απαιτούν τη χρήση δεδομένων που αποτελούνται από αριθμούς αλλά και από γράμματα και από ειδικούς χαρακτήρες. Για παράδειγμα, το λογιστήριο μίας εταιρείας χρησιμοποιεί ηλεκτρονικό υπολογιστή για να επεξεργάζεται τα αρχεία της μισθοδοσίας της εταιρείας. Για να παρασταθούν τα ονόματα των εργαζομένων σε δυαδική μορφή, πρέπει να υπάρχει ένας δυαδικός κώδικας για το αλφάβητο. Για να παρασταθούν οι μισθοί των εργαζομένων σε δυαδική μορφή πρέπει να υπάρχει ένας δυαδικός κώδικας για τους δεκαδικούς αριθμούς και για κάποιους ειδικούς χαρακτήρες, όπως είναι ο χαρακτήρας "$".

Οι **αλφαριθμητικοί χαρακτήρες** περιλαμβάνουν:

- τα 26 κεφαλαία γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου A-Z
- τα 26 μικρά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου a-z
- τα 10 δεκαδικά ψηφία 0-9
- τους ειδικούς χαρακτήρες (τα σημεία στίξης όπως ! . , ? και άλλους χαρακτήρες όπως @ # $ % & * + /).

Ένας **αλφαριθμητικός κώδικας** είναι ένας συστηματικός τρόπος παράστασης των αλφαριθμητικών χαρακτήρων σε δυαδική μορφή. Κάθε αλφαριθμητικός χαρακτήρας παριστάνεται με μία ομάδα bits, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από το πλήθος των αλφαριθμητικών χαρακτήρων που παριστάνει ο κώδικας.

Τέτοιοι δυαδικοί αλφαριθμητικοί κώδικες είναι οι ακόλουθοι:

– ο κώδικας ASCII που χρησιμοποιεί 7 bits

– ο κώδικας Baudot που χρησιμοποιεί 5 bits

2.7.4.2 Ο κώδικας ASCII

Ο πλέον συχνά χρησιμοποιούμενος δυαδικός αλφαριθμητικός κώδικας είναι ο κώδικας ASCII (American Standard Code for Information Interchange) ο οποίος χρησιμοποιεί 7 bits για την κωδικοποίηση 128 χαρακτήρων.

Ο κώδικας ASCII περιλαμβάνει 94 εκτυπώσιμους γραφικούς χαρακτήρες και 34 μη εκτυπώσιμους χαρακτήρες ελέγχου (control characters), δηλαδή συνολικά 128 χαρακτήρες που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.7.3.

Πίνακας 2.7.3 Κώδικας ASCII

$b_7b_6b_5$ / $b_4b_3b_2b_1$	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	‘	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	‘	<	L	\	l	¦
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	Æ	n	~
1111	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Οι εκτυπώσιμοι χαρακτήρες είναι:

- τα 26 κεφαλαία γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου A-Z
- τα 26 μικρά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου a-z
- οι 10 αριθμοί 0-9
- οι 32 ειδικοί χαρακτήρες.

Οι χαρακτήρες ελέγχου χωρίζονται σε:

- διαμορφωτές μορφής
- διαχωριστές πληροφορίας
- χαρακτήρες ελέγχου-επικοινωνίας.

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές συνήθως χρησιμοποιούν δυαδικές λέξεις των 8 bits (1 byte),ενώ ο κώδικας ASCII χρησιμοποιεί 7 bits. Έτσι, κάθε χαρακτήρας του κώδικα ASCII συνήθως αναπαρίσταται με 1 byte των 8 bits, οπότε μπορεί να γίνει κωδικοποίηση 256 χαρακτήρων. Για την κωδικοποίηση των 128 χαρακτήρων του κώδικα ASCII χρησιμοποιείται το MSB με τιμή "0" (και τα υπόλοιπα 7 bits είναι τα 7 bits του κώδικα ASCII).

Παράδειγμα: Η λέξη **bit** στον κώδικα ASCII είναι:

b	i	t
1100010	1101001	1110100

Για την κωδικοποίηση άλλων χαρακτήρων (για παράδειγμα τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου) χρησιμοποιείται το MSB με τιμή "1". Με τον τρόπο αυτόν έχει προκύψει το Πρότυπο ΕΛΟΤ-928 του Ελληνικού Οργανισμού Τυποποίησης που είναι εγκεκριμένο από την ISO (International Standards Organisation).

2.8 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Ένα αριθμητικό σύστημα είναι ένα σύνολο από ψηφία (αριθμοί και χαρακτήρες) που χρησιμοποιούνται για αρίθμηση και για υπολογισμούς (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση). Η ανάπτυξη των αριθμητικών συστημάτων βασίζεται σε δύο αρχές: την ύπαρξη βάσης (base, radix) του συστήματος και την ύπαρξη βάρους (weight) των θέσεων.
2. Κάθε αριθμός εκφρασμένος σε αριθμητικό σύστημα με βάση (radix) το r παριστάνεται με μία σειρά από ψηφία, οι τιμές των οποίων κυμαίνονται από 0 μέχρι r-1, δηλαδή:

$$(A)_r = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός (αριθμητικό σύστημα με βάση το 10) είναι:

$$(A)_{10} = a_n x r^n + a_{n-1} x r^{n-1} + \dots + a_2 x r^2 + a_1 x r^1 + a_0 x r^0$$

Το MSB ενός δυαδικού αριθμού είναι το πρώτο από αριστερά bit και έχει το μεγαλύτερο βάρος.

Το LSB ενός δυαδικού αριθμού είναι το πρώτο από δεξιά bit και έχει το μικρότερο βάρος.

Στον Πίνακα 2.8.1 παρουσιάζονται τα ακόλουθα Αριθμητικά Συστήματα:

– δεκαδικό (βάση 10)
– δυαδικό (βάση 2)
– οκταδικό (βάση 8) και
– δεκαεξαδικό (βάση 16)

Πίνακας 2.8.1 *Αριθμητικά συστήματα*

Δεκαδικό βάση 10	Δυαδικό Βάση 2	Οκταδικό βάση 8	Δεκαεξαδικό βάση 16
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

3. Οι μνημονικοί κανόνες των δυαδικών πράξεων συνοψίζονται στον Πίνακα 2.8.2.

Πίνακας 2.8.2 Μνημονικοί κανόνες των δυαδικών πράξεων

Πρόσθεση	Αφαίρεση
0+0=0	0-0=0
0+1=1	0-1=11
1+0=1	1-0=1
1+1=10	1-1=0

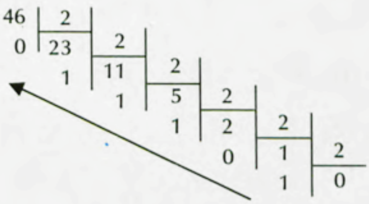
4. Κώδικας είναι ένας συστηματικός τρόπος παράστασης πληροφοριών.
5. Δυαδικός κώδικας είναι ένας συστηματικός τρόπος παράστασης πληροφοριών σε δυαδική μορφή. Οι δυαδικοί κώδικες χρησιμοποιούν το δυαδικό ψηφίο (bit) με δύο πιθανές τιμές "0" και "1".
6. Ο κώδικας BCD είναι δυαδικός κώδικας με βάρη που χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος, όπως δηλώνει άλλωστε το όνομά του: Binary Coded Decimal (δυαδικά κωδικοποιημένο δεκαδικό).
7. Ο κώδικας Gray είναι δυαδικός κώδικας χωρίς βάρη που χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των δεκαδικών αριθμών (όχι μόνο των 10 ψηφίων του δεκαδικού συστήματος, όπως γίνεται στον κώδικα BCD).
8. Ένας αλφαριθμητικός κώδικας είναι ένας συστηματικός τρόπος παράστασης των αλφαριθμητικών χαρακτήρων σε δυαδική μορφή. Κάθε αλφαριθμητικός χαρακτήρας παριστάνεται με μία ομάδα bits, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από το πλήθος των αλφαριθμητικών χαρακτήρων που παριστάνει ο κώδικας.

2.9 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατραπούν σε δεκαδικούς οι δυαδικοί αριθμοί:
   α. 1010, β. 10110011

   α. $(1010)_2=1x2^3+0x2^2+1x2^1+0x2^0=8+0+2+0=(10)_{10}$
   β. $(10110011)_2=1x2^7+0x2^6+1x2^5+1x2^4+0x2^3+0x2^2+1x2^1+1x2^0=$
   $=128+0+32+16+0+0+2+1=(179)_{10}$
2. Να μετατραπεί σε δυαδικό ο δεκαδικός αριθμός 46.

   $(46)_{10}=(101110)_2$



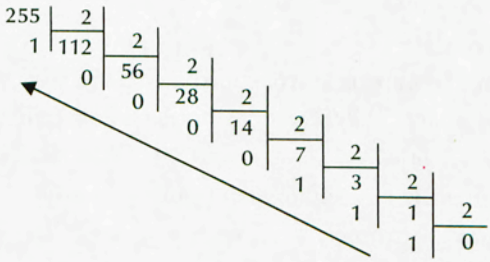
3. Να μετατραπούν σε δεκαδικούς
   α. ο οκταδικός 630
   β. ο δεκαεξαδικός B65F

α. $(630)_8=6x8^2+3x8^1+0x8^0=(408)_{10}$

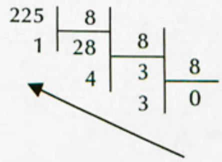
β. $(B65F)_{16}=11x16^3+6x16^2+5x16^1+15x16^0=(46687)_{10}$

4. Να μετατραπεί ο δεκαδικός 225 σε
   α. δυαδικό
   β. οκταδικό
   γ. δεκαεξαδικό

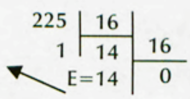
α. $(225)_{10}=(11100001)_2$



β. $(225)_{10}=(341)_8$



γ. $(225)_{10}=(11100001)_2=(341)_8=(E1)_{16}$



5. Να μετατραπεί ο δυαδικός 1011000110101110100010 σε
   α. οκταδικό
   β. δεκαεξαδικό

α. $(1011000110101110100010)_2=(13065642)_8$

001	011	000	110	101	110	100	010
1	3	0	6	5	6	4	2

β. $(1011000110101110100010)_2=(2C6BA2)_{16}$

0010	1100	0110	1011	1010	0010
2	C	6	B	A	2

6. Να μετατραπεί ο δεκαεξαδικός F3A7C2 σε δυαδικό.
$(F3A7C2)_{16}=(111100111010011111000010)_2$

F	3	A	7	C	2
1111	0011	1010	0111	1100	0010

7. Να μετατραπεί ο οκταδικός 4370 σε δυαδικό.
$(4370)_8=(100011111000)_2$

100	011	111	000
4	3	7	0

8. Να πραγματοποιηθούν οι δυαδικές πράξεις:
α. $(1111)_2+(1110)_2$
β. $(1101)_2$-$(1010)_2$

α. $(1111)_2+(1110)_2=(11101)_2$

Κρατούμενο	1	1				
	1	1	1	1		15
+	1	1	1	0	+	14
1	1	1	0	1		29

β. $(1101)_2$-$(1010)_2=(0101)_2$

Δανεικό		1				
	1	1	0	1		13
−	1	0	1	0	−	10
	0	0	1	1		3

9. Να πραγματοποιηθούν οι δεκαεξαδικές πράξεις:
α. $(10F9)_{16}+(AB28)_{16}$
β. $(E49B)_{16}$-$(2C73)_{16}$

α. $(10F9)_{16}+(AB28)_{16}=(BC21)_{16}$

Κρατούμενο		1	1			
	1	0	F	9		4345
+	A	B	2	8	+	43816
	B	C	2	1		48161

β. $(E49B)_{16}$-$(2C73)_{16}$=$(B828)_{16}$

$$\begin{array}{rcccc} & D & 20 & & \\ & \cancel{E} & \cancel{4} & 9 & B \\ - & 2 & C & 7 & 3 \\ \hline & B & 8 & 2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 58523 \\ - & 11379 \\ \hline & 47144 \end{array}$$

10. Να μετατραπεί ο 11-bits δυαδικός αριθμός 11010001110 σε BCD αριθμό.
Ο 11-bits δυαδικός αριθμός 11010001110 αντιστοιχεί στο δεκαδικό αριθμό 1678, αφού:

$$(11010001110)_2=1x2^{10}+1x2^9+0x2^8+1x2^7+0x2^6+0x2^5+$$
$$+0x2^4+1x2^3+1x2^2+1x2^1+0x2^0=(1678)_{10}$$

Ο δεκαδικός αριθμός 1678 αντιστοιχεί στον 16-bits BCD αριθμό 0001011001111000, αφού:

1	6	7	8
0001	0110	0111	1000

Επομένως, ο 11-bits δυαδικός αριθμός 11010001110 αντιστοιχεί στον 16-bits BCD αριθμό 0001011001111000.

2.10 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τι είναι MSB και τι είναι LSB;

2. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δεκαδικός αριθμός που μπορεί να παρασταθεί στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας 10 bits;

3. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος bits που απαιτούνται για να παρασταθεί στο δυαδικό σύστημα ο δεκαδικός αριθμός 2149;

4. Πόσες είναι οι θέσεις μνήμης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι διευθύνσεις μνήμης του οποίου αριθμούνται από 0000 μέχρι και FFFF στο δεκαεξαδικό σύστημα;

5. Να μετατρέψετε τον 8-bits δυαδικό αριθμό 11100011 σε δεκαδικό.

6. Να μετατρέψετε το δεκαδικό αριθμό 18 σε δυαδικό.

7. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;

α. $(73)_8=(3B)_{16}$ Αληθής ☐ Ψευδής ☐
β. $(11011011)_2=(192)_{10}$ Αληθής ☐ Ψευδής ☐

γ. $(2BC)_{16}=(700)_{10}$ Αληθής ☐ Ψευδής ☐

δ. $(4095)_{10}=(FFF)_{16}$ Αληθής ☐ Ψευδής ☐

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω Πίνακα ισοδύναμων αριθμών στο δεκαδικό, δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα:

Δεκαδικό Σύστημα	Δυαδικό Σύστημα	Οκταδικό Σύστημα	Δεκαεξαδικό Σύστημα
10			
	1100		
		31	
			2F

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω Πίνακα ισοδύναμων αριθμών στο δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα:

Δυαδικό Σύστημα	Οκταδικό Σύστημα	Δεκαεξαδικό Σύστημα
100110001111		
	6740	
		B14

10. Να βρείτε τα αποτελέσματα των δυαδικών πράξεων:
    α. $(0111)_2+(0011)_2$
    β. $(1100)_2$-$(1001)_2$

11. Να βρείτε τα αποτελέσματα των δεκαεξαδικών πράξεων:
    α. $(35E)_{16}+(A1)_{16}$
    β. $(12B)_{16}+(1C)_{16}$
    γ. $(41)_{16}$-$(C)_{16}$
    δ. $(3F2)_{16}$-$(D1)_{16}$

12. Το αποτέλεσμα της δεκαεξαδικής πρόσθεσης A+C είναι ο δεκαεξαδικός αριθμός:
    α) A1 β) 16 γ) 61 δ) 1C

13. Το αποτέλεσμα της δεκαεξαδικής αφαίρεσης 12F-4E είναι ο δεκαεξαδικός αριθμός:

α) A1 β) F0 γ) EA δ) E1

14. Να μετατρέψετε το δεκαδικό αριθμό 54 σε

α. BCD αριθμό

β. δυαδικό αριθμό

15. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό και ποιο είναι λάθος;

α. Ο δεκαδικός αριθμός 72 αντιστοιχεί στον BCD αριθμό 01110010

ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

β. Ο δεκαδικός αριθμός 94 αντιστοιχεί στον BCD αριθμό 10010101

ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

γ. Ο δεκαδικός αριθμός 38 αντιστοιχεί στον BCD αριθμό 00111000

ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

δ. Ο δεκαδικός αριθμός 15 αντιστοιχεί στον BCD αριθμό 10010101

ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

16. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω Πίνακα ισοδύναμων δεκαδικών, δυαδικών και BCD αριθμών:

Δεκαδικός Αριθμός	Δυαδικός Αριθμός	BCD Αριθμός
25		
	101100	
		10010011

17. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό και ποιο είναι λάθος;

α. Ο κώδικας Gray είναι δυαδικός κώδικας με βάρη

ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

β. Μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών του κώδικα Gray αλλάζει ένα μόνο bit

ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

18. Να αποκωδικοποιήσετε τους ακόλουθους ASCII κώδικες:

α. 1010011 1001111 1010011

β. 1000010 1001111 1001111 1001100 1000101

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Εργασία 1

Ένα παιχνίδι παίζεται με τα εξής φύλλα της τράπουλας:

7

8

9

10

J (Βαλές)

Q (Ντάμα)

K (Ρήγας)

1 (Άσσος)

και των τεσσάρων χρωμάτων της τράπουλας, που είναι:

♠ (Μπαστούνια)

♣ (Σπαθιά)

♦ (Καρά)

♥ (Κούπες)

Να σχεδιάσετε έναν δυαδικό κώδικα για την αναπαράσταση των φύλλων της τράπουλας με τα οποία παίζεται το παιχνίδι αυτό, χρησιμοποιώντας το ελάχιστο δυνατό πλήθος bits.