

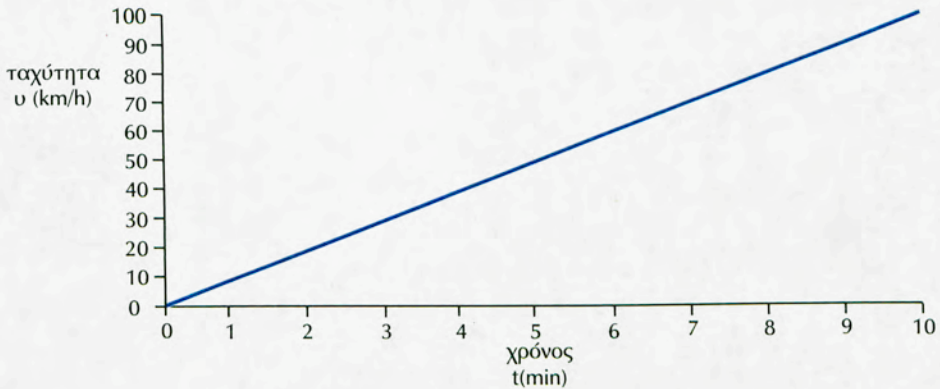
1. Να γνωρίζετε τα αναλογικά και ψηφιακά μεγέθη και κυκλώματα.
2. Να γνωρίζετε πράξεις, αξιώματα και θεωρήματα της Άλγεβρας Boole.
3. Να γνωρίζετε πίνακες αληθείας, λογικά διαγράμματα (σύμβολα) και λογικές συναρτήσεις των λογικών πυλών: NOT, AND, OR, NAND, NOR, XOR και XNOR.
4. Να μπορείτε να χρησιμοποιείτε Ολοκληρωμένα Κυκλώματα που περιέχουν πύλες.
5. Να μπορείτε να μελετάτε τα φύλλα δεδομένων (data sheets) Ολοκληρωμένα Κυκλώματα που περιέχουν πύλες.

1 κεφάλαιο

ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE
ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

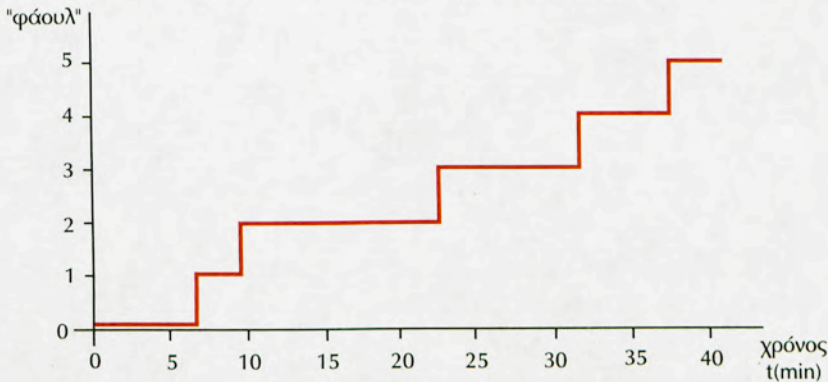
1.1 ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ

Αναλογικό μέγεθος ονομάζεται ένα μέγεθος που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε μία περιοχή τιμών. Για παράδειγμα, αναλογικά μεγέθη είναι: η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου, η θερμοκρασία ενός δωματίου, το βάρος ενός ανθρώπου, το ύψος ενός δένδρου. Έτσι, κατά την επιτάχυνση ενός αυτοκινήτου από 0 χλμ/ώρα (αρχική ταχύτητα) έως 100 χλμ/ώρα (τελική ταχύτητα), η ταχύτητά του λαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές στο διάστημα από 0 χλμ/ώρα έως 100 χλμ/ώρα (άπειρο πλήθος τιμών), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.1.



Σχήμα 1.1.1 Αναλογικό μέγεθος

Ψηφιακό μέγεθος ονομάζεται το μέγεθος που μπορεί να πάρει συγκεκριμένες (διακριτές) τιμές σε μία περιοχή τιμών. Για παράδειγμα, ψηφιακά μεγέθη είναι: το πλήθος των «φάουλ» ενός παίκτη μπάσκετ κατά τη διάρκεια ενός αγώνα, οι βαθμοί μίας ομάδας ποδοσφαίρου κατά τη διάρκεια του πρωταθλήματος. Έτσι, κατά τη διάρκεια ενός αγώνα μπάσκετ, ένας παίκτης μπορεί να κάνει 1, 2, 3, 4 ή 5 «φάουλ» (καθορισμένο πλήθος διακριτών τιμών), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.2.



Σχήμα 1.1.2 Ψηφιακό μέγεθος

Δυαδικό μέγεθος είναι ένα ψηφιακό μέγεθος που μπορεί να πάρει μόνο δύο (2) διακριτές τιμές. Για παράδειγμα, δυαδικά μεγέθη είναι: η λογική πρόταση «σήμερα βρέχει» (η λογική πρόταση μπορεί να είναι αληθής (TRUE) αν πράγματι βρέχει ή ψευδής (FALSE) αν δεν βρέχει), η κατάσταση ενός λαμπτήρα (ο λαμπτήρας μπορεί να είναι αναμμένος (ON) ή σβηστός (OFF)), η κατάσταση ενός διακόπτη (ο διακόπτης μπορεί να είναι ανοικτός ή κλειστός όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.3).



Σχήμα 1.1.3 Δυαδικό μέγεθος

Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα κατατάσσονται σε δύο βασικές κατηγορίες, ανάλογα με τα σήματα που επεξεργάζονται:

- ✓ αναλογικά κυκλώματα (analog circuits)
- ✓ ψηφιακά κυκλώματα (digital circuits)

1.2 Η ΔΙΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

1.2.1 Ορισμός

Η Άλγεβρα Boole (Boolean algebra) πήρε το όνομά της από τον G. Boole (1815-1864), ο οποίος ανέπτυξε ένα αλγεβρικό σύστημα (1854) για τη συστηματική αντιμετώπιση της λογικής. Τα αξιώματα της Άλγεβρας Boole διατυπώθηκαν από τον E. V. Huntington (1904).

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα Boole ονομάζονται λογικές μεταβλητές γιατί μπορούν να πάρουν δύο (2) μόνο τιμές: 0 και 1. Αυτός είναι ο λόγος που η Άλγεβρα Boole αποτελεί τη βάση για τα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα.

Στην Άλγεβρα Boole ορίζονται τρεις βασικές πράξεις:

- ☞ η πράξη NOT (ΟΧΙ) με σύμβολο $\bar{}$
- ☞ η πράξη AND (ΚΑΙ) με σύμβολο \cdot
- ☞ η πράξη OR (Ή) με σύμβολο $+$

Η πράξη NOT

Στην πράξη NOT συμμετέχει μία μόνο λογική μεταβλητή και το αποτέλεσμα της πράξης είναι το συμπλήρωμα της μεταβλητής αυτής, δηλαδή αν η μεταβλη-

τή έχει την τιμή "0", τότε το αποτέλεσμα είναι "1" και αντίστροφα αν η μεταβλητή έχει την τιμή "1", τότε το αποτέλεσμα είναι "0".

Πίνακας 1.2.1 Πίνακας Αληθείας της πράξης NOT

A	$Y = \bar{A}$
0	1
1	0

Αν A είναι μία λογική μεταβλητή, τότε η πράξη NOT εκφράζεται με τη σχέση:

$$Y = \bar{A}$$

Ο πίνακας αληθείας της πράξης NOT παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.2.1.

Η πράξη AND

Στην πράξη AND συμμετέχουν δύο λογικές μεταβλητές και το αποτέλεσμα της πράξης είναι "1", αν και οι δύο μεταβλητές είναι "1".

Πίνακας 1.2.2 Πίνακας Αληθείας της πράξης AND

A	B	$Y = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Αν A και B είναι δύο λογικές μεταβλητές, τότε η πράξη AND εκφράζεται με τη σχέση:

$$Y = A \cdot B$$

Σημείωση: το σύμβολο της πράξης AND (\cdot) μπορεί να παραλείπεται στις εκφράσεις της Άλγεβρας Boole ($A \cdot B = AB$).

Ο πίνακας αληθείας της πράξης AND παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.2.2.

Η πράξη OR

Στην πράξη OR συμμετέχουν δύο λογικές μεταβλητές και το αποτέλεσμα της πράξης είναι "1", αν τουλάχιστον μία από τις δύο μεταβλητές είναι "1".

Πίνακας 1.2.3 Πίνακας Αληθείας της πράξης OR

A	B	$Y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Αν A και B είναι δύο λογικές μεταβλητές, τότε η πράξη OR εκφράζεται με τη σχέση:

$$Y = A + B$$

Ο πίνακας αληθείας της πράξης OR παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.2.3.

1.2.2 Αξιώματα Huntington

1. Ουδέτερα στοιχεία των πράξεων AND και OR

Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης AND είναι το 1 και το ουδέτερο στοιχείο της πράξης OR είναι το 0.

$$\alpha. x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$\beta. x + 0 = 0 + x = x$$

Το αξίωμα αυτό μπορεί να επαληθευτεί από τους πίνακες αληθείας των πράξεων AND και OR, από όπου φαίνεται ότι:

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \text{ και } 1 \cdot 1 = 1$$

και

$$0 + 0 = 0 \text{ και } 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

2. Αντιμεταθετική ιδιότητα των πράξεων AND και OR

Οι πράξεις AND και OR έχουν την αντιμεταθετική ιδιότητα.

$$\alpha. x \cdot y = y \cdot x$$

$$\beta. x + y = y + x$$

3. Επιμεριστική ιδιότητα των πράξεων AND και OR

Η πράξη AND έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πράξη OR και η πράξη OR έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πράξη AND.

$$\alpha. x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$\beta. x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

4. Συμπλήρωμα (NOT)

Κάθε λογική μεταβλητή x έχει ένα συμπλήρωμα \bar{x} με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\alpha. x \cdot \bar{x} = 0$$

$$\beta. x + \bar{x} = 1$$

Το αξίωμα αυτό μπορεί να επαληθευτεί από τους πίνακες αληθείας της πράξης NOT, από όπου φαίνεται ότι:

$$0 \cdot \bar{0} = 0 \cdot 1 = 0 \text{ και } 1 \cdot \bar{1} = 1 \cdot 0 = 0$$

και

$$0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1 \text{ και } 1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$$

1.2.3 Αρχή Δυϊσμού

Η ισχύς των εκφράσεων της Άλγεβρας Boole εξακολουθεί να υφίσταται, αν γίνει αλλαγή των πράξεων AND και OR και των ουδέτερων στοιχείων μεταξύ τους ($\cdot \leftrightarrow +$ και $0 \leftrightarrow 1$).

Για παράδειγμα, αν ισχύει η έκφραση $x + 1 = 1$, τότε ισχύει και η έκφραση $x \cdot 0 = 0$ και η μία έκφραση ονομάζεται δυϊκή της άλλης.

1.2.4 Θεωρήματα Άλγεβρας Boole

Θεώρημα 1.

α. $x \cdot x = x$

β. $x + x = x$

Θεώρημα 2.

α. $x \cdot 0 = 0$

β. $x + 1 = 1$

Θεώρημα 3.

$x = \overline{\overline{x}}$

Θεώρημα 4. Προσεταιριστική ιδιότητα

α. $x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

β. $x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$

Θεώρημα 5. Θεώρημα απορρόφησης

α. $x + x \cdot y = x$

β. $x \cdot (x + y) = x$

Θεώρημα 6. Θεώρημα De Morgan

α. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

β. $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

Παρατήρηση:

Το Θεώρημα De Morgan ισχύει και για περισσότερες από δύο μεταβλητές, για παράδειγμα:

α. $\overline{x \cdot y \cdot z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

β. $\overline{x + y + z} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

1.2.5. Προτεραιότητα πράξεων

Για την εκτέλεση των πράξεων στις εκφράσεις της Άλγεβρας Boole είναι ανάγκη να καθορισθεί η προτεραιότητα της εκτέλεσής τους, όπως γίνεται στην γνωστή από τα μαθηματικά άλγεβρα.

Πίνακας 1.2.4 Προτεραιότητα πράξεων

Προτεραιότητα	Πράξη
1	()
2	NOT
3	AND
4	OR

Ο Πίνακας προτεραιότητας των πράξεων παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.2.4.

Από τον Πίνακα προτεραιότητας των πράξεων προκύπτει ότι σε μία έκφραση της Άλγεβρας Boole εκτελούνται πρώτα οι πράξεις μέσα σε παρενθέσεις, μετά υπολογίζονται τα συμπληρώματα, στην συνέχεια εκτελούνται οι πράξεις AND και τέλος εκτελούνται οι πράξεις OR.

1.3 ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

1.3.1 Λογικά διαγράμματα των λογικών πυλών






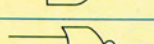

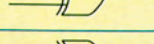
Οι λογικές πύλες είναι τα βασικά δομικά στοιχεία στα ψηφιακά κυκλώματα. Όπως έχουμε στις οικοδομές τα τούβλα και με αυτά κατασκευάζουμε τοίχους και σύνθετες κατασκευές χρησιμοποιώντας παρόμοια υλικά ξανά και ξανά, έτσι και στα ψηφιακά κυκλώματα χρησιμοποιούμε τις λογικές πύλες για να κατασκευάσουμε σύνθετα κυκλώματα.

Οι λογικές πύλες μίας και δύο εισόδων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.3.1 όπου η έξοδος εκφράζεται ως συνάρτηση των εισόδων.

Πίνακας 1.3.1 Λογικές Πύλες - Συναρτήσεις

Λογική Πύλη	Είσοδοι	Έξοδος	Συνάρτηση
Απομονωτής Buffer	A	Y	$Y=A$
Αντιστροφέας NOT	A	Y	$Y=\bar{A}$
AND	A,B	Y	$Y=A \cdot B$
OR	A,B	Y	$Y=A+B$
NAND	A,B	Y	$Y=\overline{A \cdot B}$
NOR	A,B	Y	$Y=\overline{A+B}$
XOR	A,B	Y	$Y=A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = A \oplus B$
XNOR	A,B	Y	$Y=A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A \oplus B} = A \odot B$

Τα λογικά διαγράμματα (οι συμβολισμοί) των πυλών αυτών παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.3.2.

Λογική Πύλη	Λογικό Διάγραμμα
Απομονωτής Buffer	A  Y=A
Αντιστροφέας NOT	A  Y = \bar{A}
AND	A B  Y = A · B
OR	A B  Y = A + B
NAND	A B  Y = $\overline{A \cdot B}$
NOR	A B  Y = $\overline{A + B}$
XOR	A B  Y = A ⊕ B
XNOR	A B  Y = A ⊙ B

1.3.2 Πίνακες αληθείας των λογικών πυλών

Πίνακας 1.3.3 Πίνακας αληθείας του απομονωτή

A	Y=A
0	0
1	1

Πίνακας 1.3.4 Πίνακας αληθείας της πύλης NOT

A	Y = \bar{A}
0	1
1	0

Πίνακας 1.3.5 Πίνακας Αληθείας της πύλης AND

A	B	Y=A · B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ο απομονωτής (buffer)

Ο απομονωτής (buffer) είναι μία πύλη με μία είσοδο και μία έξοδο που είναι ίση με την είσοδο. Η συνάρτηση του απομονωτή είναι:

$$Y=A$$

και ο πίνακας αληθείας του απομονωτή παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.3.

Η πύλη NOT

Η πύλη NOT έχει μία είσοδο και μία έξοδο που είναι ίση με το συμπλήρωμα της εισόδου. Η συνάρτηση της πύλης NOT είναι:

$$Y = \bar{A}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης NOT παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.4.

Η πύλη AND

Η πύλη AND έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν και οι δύο εισοδοί είναι "1". Η συνάρτηση της πύλης AND είναι:

$$Y=A \cdot B$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης AND παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.5.

Η πύλη OR

Η πύλη OR έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν τουλάχιστον μία από τις δύο εισόδους είναι "1".

Η συνάρτηση της πύλης OR είναι:

$$Y=A+B$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης OR παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.6.

Η πύλη NAND

Η πύλη NAND προκύπτει από μία πύλη AND ακολουθούμενη από μία πύλη NOT. Η πύλη NAND έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν τουλάχιστον μία από τις δύο εισόδους είναι "0". Η συνάρτηση της πύλης NAND είναι:

$$Y = \overline{A \cdot B}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης NAND παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.7.

Η πύλη NOR

Η πύλη NOR προκύπτει από μία πύλη OR ακολουθούμενη από μία πύλη NOT. Η πύλη NOR έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν και οι δύο εισόδους είναι "0". Η συνάρτηση της πύλης NOR είναι:

$$Y = \overline{A + B}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης NOR παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.8.

Η πύλη XOR

Η πύλη XOR (exclusive OR) έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν οι δύο εισόδους είναι διαφορετικές μεταξύ τους (για αυτό ονομάζεται και πύλη διαφωνίας ή σύγκρισης). Η συνάρτηση της πύλης XOR είναι:

$$Y=A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης XOR παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.9.

Πίνακας 1.3.6 Πίνακας Αληθείας της πύλης OR

A	B	Y=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Πίνακας 1.3.7 Πίνακας Αληθείας της πύλης NAND

A	B	Y = $\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πίνακας 1.3.8 Πίνακας Αληθείας της πύλης NOR

A	B	Y = $\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Πίνακας 1.3.9 Πίνακας Αληθείας της πύλης XOR

A	B	Y=A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πίνακας 1.3.10 Πίνακας Αληθείας της πύλης ΧΝΟR

A	B	$Y=A\odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η πύλη ΧΝΟR

Η πύλη ΧΝΟR (exclusive NOR) έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν οι δύο εισοδοί είναι ίσες.

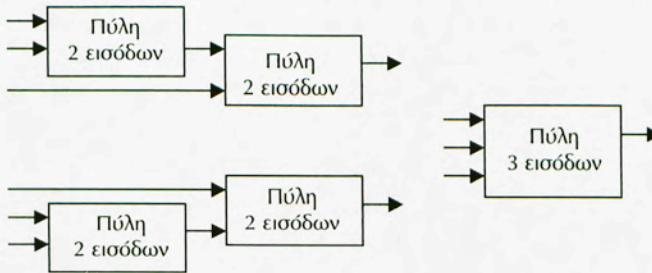
Η συνάρτηση της πύλης ΧΝΟR είναι:

$$Y=A\odot B=A\cdot B+\bar{A}\cdot\bar{B}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης ΧΝΟR παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3.10.

1.3.3 Λογικές πύλες πολλαπλών εισόδων

Οι πύλες δύο εισόδων μπορούν να επεκταθούν ώστε να έχουν περισσότερες από δύο εισόδους, εάν οι πράξεις τους έχουν την *αντιμεταθετική* και την *προσεταιριστική* ιδιότητα. Η υλοποίηση μίας τέτοιας πύλης τριών (3) εισόδων με χρήση ομοίων πυλών δύο (2) εισόδων παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3.1.



Σχήμα 1.3.1 Τεχνική επέκτασης εισόδων πυλών

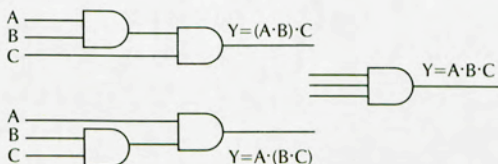
Για παράδειγμα, μία πύλη AND τριών εισόδων μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες AND δύο εισόδων όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.2, γιατί ισχύει:

- η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$Y=A\cdot B=B\cdot A$$

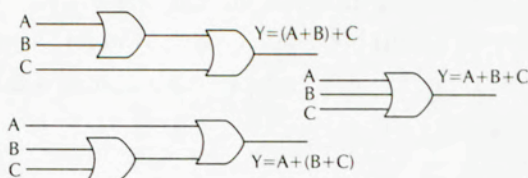
- η προσεταιριστική ιδιότητα

$$Y=A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot (B\cdot C)$$



Σχήμα 1.3.2 Υλοποίηση πύλης AND τριών εισόδων με πύλες AND δύο εισόδων

Με την ίδια λογική, μία πύλη OR τριών εισόδων μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες OR δύο εισόδων όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.3.



Σχήμα 1.3.3 Υλοποίηση πύλης OR τριών εισόδων με πύλες OR δυο εισόδων

Η πύλη NAND τριών εισόδων ορίζεται ως το συμπλήρωμα της πύλης AND τριών εισόδων. Επομένως, η έξοδος της πύλης NAND τριών εισόδων είναι "1", αν τουλάχιστον μία από τις τρεις εισόδους είναι "0".

Μία πύλη NAND τριών εισόδων **δεν** μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες NAND δύο εισόδων, γιατί ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, αλλά δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα αφού:

$$\overline{A \cdot B \cdot C} \neq \overline{\overline{A \cdot B} \cdot C} = A \cdot B + \overline{C}$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C} \neq \overline{\overline{A \cdot B} \cdot C} = \overline{A} + B \cdot C$$

όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.3.11.

Πίνακας 1.3.11 Πύλη NAND: δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

A	B	C	$\overline{A \cdot B \cdot C}$	$\overline{\overline{A \cdot B} \cdot C}$	$\overline{\overline{A \cdot B} \cdot C}$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1

Με την ίδια λογική, μία πύλη NOR τριών εισόδων **δεν** μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες NOR δύο εισόδων.

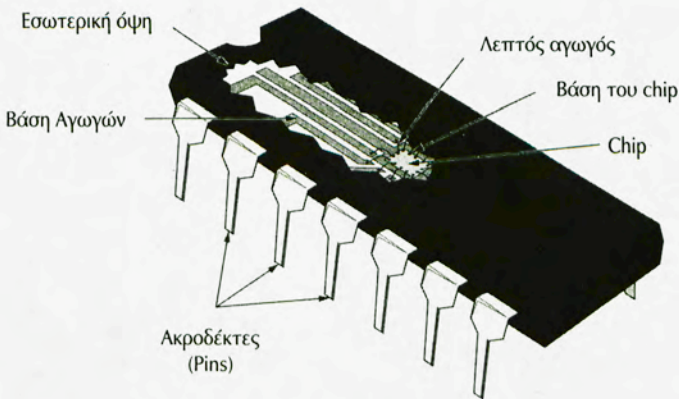
Η λογική της επέκτασης του πλήθους των εισόδων των πυλών, μπορεί να εφαρμοστεί και για πύλες τεσσάρων εισόδων.

Για παράδειγμα, μία πύλη AND τεσσάρων εισόδων μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τρεις πύλες AND δύο εισόδων και μία πύλη OR τεσσάρων εισόδων μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τρεις πύλες OR δύο εισόδων.

1.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ (Ο.Κ.)

1.4.1 Τεχνολογίες κατασκευής ολοκληρωμένων κυκλωμάτων

Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα (integrated circuits) είναι συστατικά στοιχεία των ψηφιακών κυκλωμάτων. Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα είναι ένας ημιαγωγός κρύσταλλος από πυρίτιο (chip) που περιέχει ηλεκτρονικά στοιχεία με τα οποία κατασκευάζονται οι πύλες. Το chip τοποθετείται σε ένα πλαστικό περίβλημα και συγκολλούνται επαφές σε εξωτερικούς ακροδέκτες (pins) για να σχηματιστεί το ολοκληρωμένο κύκλωμα. Στο Σχήμα 1.4.1 φαίνεται η εσωτερική όψη ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος σε συσκευασία ακροδεκτών διπλής σειράς (Dual In-line Package - DIP).



Σχήμα 1.4.1 Εσωτερική όψη ολοκληρωμένου κυκλώματος

Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα ανήκουν σε μία Κλίμακα Ολοκλήρωσης (Scale Integration) ανάλογα με το πλήθος των ισοδύναμων με πύλες κυκλωμάτων που περιέχουν. Έτσι, τα ολοκληρωμένα κυκλώματα ανήκουν σε μία από τις ακόλουθες κατηγορίες:

- ✓ **SSI** (Small Scale Integration) περιλαμβάνει λιγότερα από 12 ισοδύναμα με μία πύλη κυκλώματα

- ✓ **MSI** (Medium Scale Integration) περιλαμβάνει 12-100 ισοδύναμα με μία πύλη κυκλώματα
- ✓ **LSI** (Large Scale Integration) περιλαμβάνει 100-1000 ισοδύναμα με μία πύλη κυκλώματα
- ✓ **VLSI** (Very Large Scale Integration) περιλαμβάνει περισσότερα 1000-100000 ισοδύναμα με μία πύλη κυκλώματα
- ✓ **ULSI** (Ultra Large Scale Integration) περιλαμβάνει περισσότερα από 100000 ισοδύναμα με μία πύλη κυκλώματα

Οι λογικές πύλες κατασκευάζονται με μία από τις παρακάτω τεχνολογίες ολοκληρωμένων κυκλωμάτων:

- BIPOLAR
- CMOS (Complementary Metal-Oxide Semiconductor)
- BICMOS (Bipolar CMOS)
- ECL (Emitter Coupled Logic)

Τα χαρακτηριστικά των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων λογικών πυλών είναι τα ακόλουθα:

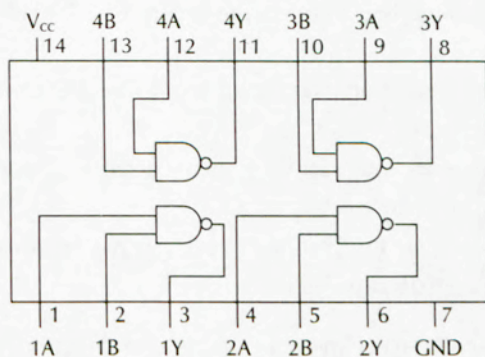
- ☛ **Ικανότητα οδήγησης εξόδου** (Fun Out) είναι το πλήθος των εισόδων του ολοκληρωμένου κυκλώματος που μπορούν να οδηγηθούν από μία έξοδο του χωρίς να κινδυνεύσει η ομαλή λειτουργία.
- ☛ **Απώλεια ισχύος** (Power Dissipation) είναι η ισχύς η οποία καταναλώνεται από τις πύλες κατά τη λειτουργία τους με αποτέλεσμα την παραγωγή θερμότητας που διαχέεται στο περιβάλλον.
- ☛ **Καθυστέρηση διάδοσης** (Propagation Delay) είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διαδοθεί η αλλαγή ενός σήματος από την είσοδο στην έξοδο.
- ☛ **Περιθώριο θορύβου** (Noise Margin) είναι η ελάχιστη τάση εξωτερικού θορύβου που προκαλεί ανεπιθύμητη αλλαγή στην έξοδο.

1.4.2 Η σειρά ολοκληρωμένων κυκλωμάτων 74

Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα της σειράς 74 είναι ευρέως χρησιμοποιούμενα. Η ονομασία τους αρχίζει με γράμματα που αφορούν στην κατασκευάστρια εταιρεία, ακολουθεί ο αριθμός 74, στη συνέχεια ακολουθούν γράμματα που προσδιορίζουν την οικογένεια και τελειώνει με αριθμούς που προσδιορίζουν τη λειτουργία τους.

Για παράδειγμα, το ολοκληρωμένο κύκλωμα DM74LS00 είναι της εταιρείας National Semiconductors (DM) της σειράς 74, τεχνολογίας BIPOLAR Low Power Schottky (LS) και περιέχει τέσσερις πύλες NAND δύο εισόδων (00).

Το ολοκληρωμένο κύκλωμα 74LS00 παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.4.2.



Σχήμα 1.4.2 Το ολοκληρωμένο κύκλωμα 74LS00

Στον Πίνακα 1.4.1 παρουσιάζονται οι εξωτερικοί ακροδέκτες (pins) του ολοκληρωμένου κυκλώματος 74LS00 και η σημασία τους. Υπάρχουν 14 pins: 12 pins για τις εισόδους και τις εξόδους των τεσσάρων πυλών NAND που περιέχει το ολοκληρωμένο κύκλωμα και 2 pins για την τροφοδοσία του.

Πίνακας 1.4.1 Οι 14 εξωτερικοί παράγοντες (pins) του ολοκληρωμένου κυκλώματος 74LS00

Pin		Σημασία
1	1A	πρώτη είσοδος πύλης 1
2	1B	δεύτερη είσοδος πύλης 1
3	1Y	έξοδος πύλης 1
4	2A	πρώτη είσοδος πύλης 2
5	2B	δεύτερη είσοδος πύλης 2
6	2Y	έξοδος πύλης 2
7	GND	γείωση
8	3Y	έξοδος πύλης 3
9	3A	πρώτη είσοδος πύλης 3
10	3B	δεύτερη είσοδος πύλης 3
11	4Y	έξοδος πύλης 4
12	4A	πρώτη είσοδος πύλης 4
13	4B	δεύτερη είσοδος πύλης 4
14	Vcc	τάση τροφοδοσίας

1.4.3 Λογικές τιμές και περιοχές τάσης.

Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα αναγνωρίζουν στις εισόδους τους ηλεκτρικές τάσεις, στις οποίες αντιστοιχούν οι λογικές τιμές "0" ή "1". Επίσης, στις εξόδους τους δίνουν ηλεκτρικές τάσεις που αντιστοιχούν στις λογικές τιμές "0" ή "1".

Στην πράξη όμως δεν είναι δυνατόν να έχουμε απόλυτα ακριβείς τιμές τάσεων. Αυτό συμβαίνει για διάφορους λόγους, όπως διακυμάνσεις της τάσης τροφοδοσίας, επίδραση της θερμοκρασίας και των θορύβων στη λειτουργία των κυκλωμάτων και επίδραση του φορτίου στην τάση εξόδου. Για το λόγο αυτό ορίζονται δύο περιοχές τάσης, η μία που αντιστοιχεί στο λογικό "1" και η άλλη που αντιστοιχεί στο λογικό "0". Ανάμεσα τους υπάρχει μία περιοχή που τις ξεχωρίζει. Μία τιμή τάσης που βρίσκεται σε αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί από το κύκλωμα ούτε ως λογικό "0" ούτε ως λογικό "1" και έτσι η συμπεριφορά του ολοκληρωμένου είναι απρόβλεπτη. Οι περιοχές των τάσεων αναφέρονται στα φύλλα δεδομένων (Data Sheets) των κατασκευαστών. Για παράδειγμα, το ολοκληρωμένο κύκλωμα 7400 αναγνωρίζει στις **εισόδους** του ως λογικό "0" την περιοχή τάσεων από 0 Volts μέχρι 0.8 Volts και ως λογικό "1" την περιοχή τάσεων από 2 Volts μέχρι 5 Volts, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.3. Οι αποδεκτές τιμές για τις τάσεις **εξόδου** του είναι από 0 Volts μέχρι 0.4 Volts για λογικό "0" και από 2.7 Volts μέχρι 5 Volts για λογικό "1", όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.4.



Σχήμα 1.4.3 Αποδεκτές τιμές για τις τάσεις εισόδου



Σχήμα 1.4.4 Αποδεκτές τιμές για τις τάσεις εξόδου

1.4.4 Οδηγίες για τη μελέτη φύλλων δεδομένων

Για να γίνει αντιληπτός ο τρόπος μελέτης των φύλλων δεδομένων (Data Sheets) των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων θα μελετήσουμε το ολοκληρωμένο κύκλωμα 74LS00.

Το φύλλο δεδομένων του παραπάνω ολοκληρωμένου κυκλώματος περιλαμβάνεται στο LS/S/TTL DATA BOOK. (Θα το βρείτε στο παράρτημα του βιβλίου εργαστηριακών ασκήσεων)

Στην πρώτη σελίδα δίνονται πληροφορίες για το περιεχόμενο του ολοκληρωμένου κυκλώματος: Quad 2 Input Gates (τέσσερις πύλες AND 2 εισόδων). Ακόμη φαίνονται το διάγραμμα συνδέσεων (Connection diagram), η λογική συνάρτηση $Y=A \cdot B$ και ο πίνακας αληθείας (Function Table).

Στη δεύτερη σελίδα φαίνονται **οι μέγιστες απόλυτες τιμές** (absolute maximum ratings), **οι συνιστώμενες συνθήκες λειτουργίας** (recommended operation conditions), **τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά** (electrical characteristics) και **οι χαρακτηριστικές μεταγωγής** (switching characteristics).

Οι μέγιστες απόλυτες τιμές αναφέρονται: στην τάση τροφοδοσίας, στην τάση εισόδου, στην περιοχή θερμοκρασίας αποθήκευσης και στην περιοχή θερμοκρασίας λειτουργίας. Τιμές μεγαλύτερες από αυτές μπορούν να καταστρέψουν το ολοκληρωμένο.

Οι συνιστώμενες συνθήκες λειτουργίας αναφέρονται: στις τιμές των παραμέτρων που προτείνει ο κατασκευαστής, δηλαδή στην τάση τροφοδοσίας (V_{CC}), στην τάση στην είσοδο για χαμηλή στάθμη (V_{IL}), στην τάση στην είσοδο για υψηλή στάθμη (V_{IH}), στο ρεύμα εξόδου για χαμηλή στάθμη (I_{OL}), στο ρεύμα εξόδου για υψηλή στάθμη (I_{OH}) και στην περιοχή θερμοκρασίας του περιβάλλοντος λειτουργίας (T_A).

Τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά είναι οι τιμές που προκύπτουν για τις παρακάτω παραμέτρους για συγκεκριμένες καταστάσεις λειτουργίας του ολοκληρωμένου:

- Τάση "στραγγαλισμού" εισόδου (V_I)
- Τάση εξόδου για υψηλή στάθμη (V_{OH})
- Τάση εξόδου για χαμηλή στάθμη (V_{OL})
- Ρεύμα εισόδου (I_I)
- Ρεύμα εισόδου για υψηλή στάθμη (I_{IH})
- Ρεύμα εισόδου για χαμηλή στάθμη (I_{IL})
- Ρεύμα εξόδου βραχυκύκλωσης (I_{OS})
- Ρεύμα του Ο.Κ. με τις εξόδους σε υψηλή στάθμη (I_{CCH})
- Ρεύμα του Ο.Κ. με τις εξόδους σε χαμηλή στάθμη (I_{CCL})

Οι χαρακτηριστικές μεταγωγής δείχνουν την ταχύτητα αντίδρασης της εξόδου του ολοκληρωμένου κυκλώματος στη μεταβολή της εισόδου, δηλαδή την καθυστέρηση διάδοσης.

1.5 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Αναλογικό μέγεθος ονομάζεται ένα μέγεθος που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε μία περιοχή τιμών. Ψηφιακό μέγεθος ονομάζεται το μέγεθος που μπορεί να πάρει συγκεκριμένες (διακριτές) τιμές σε μία περιοχή τιμών.
2. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα Boole ονομάζονται λογικές μεταβλητές, γιατί μπορούν να πάρουν μόνο δύο (2) τιμές: 0 και 1. Αυτός είναι ο λόγος που η Άλγεβρα Boole αποτελεί τη βάση για τα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα.

Στην Άλγεβρα Boole ορίζονται τρεις βασικές πράξεις: NOT, AND (ΚΑΙ) και OR (Η), με Πίνακες Αληθείας που συνοψίζονται στον Πίνακα 1.5.1.

Πίνακας 1.5.1 Πίνακες αληθείας των πράξεων NOT, AND και OR

NOT		AND		OR		
A	\bar{A}	A	B	A · B	A B	A+B
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
		1	0	0	1	0
		1	1	1	1	1

3. Τα αξιώματα και τα θεωρήματα της Άλγεβρας Boole συνοψίζονται στο Πίνακα 1.5.2.

Πίνακας 1.5.2 Αξιώματα και θεωρήματα Άλγεβρας Boole

Αξιώματα Άλγεβρας Boole	
Αξίωμα 1. Ουδέτερα στοιχεία	
α) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$	β) $x + 0 = 0 + x = x$
Αξίωμα 2. Αντιμεταθετική ιδιότητα	
α) $x \cdot y = y \cdot x$	β) $x + y = y + x$
Αξίωμα 3. Επιμεριστική ιδιότητα	
α) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	β) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
Αξίωμα 4. Συμπλήρωμα (NOT)	
α) $x \cdot \bar{x} = 0$	β) $x + \bar{x} = 1$

Θεωρήματα Άλγεβρας Boole

Θεώρημα 1.

$$\alpha) x \cdot x = x$$

$$\beta) x + x = x$$

Θεώρημα 2.

$$\alpha) x \cdot 0 = 0$$

$$\beta) x + 1 = 1$$

Θεώρημα 3.

$$x = \overline{\overline{x}}$$

Θεώρημα 4. Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\alpha) x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\beta) x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$$

Θεώρημα 5. Θεώρημα απορρόφησης

$$\alpha) x + x \cdot y = x$$

$$\beta) x \cdot (x + y) = x$$

Θεώρημα 6. Θεώρημα De Morgan

$$\alpha) \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\beta) \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

4. Στον Πίνακα 1.5.3 συνοψίζονται οι Πίνακες Αληθείας των πυλών: Απομονωτής (Buffer), Αντιστροφέας (NOT), AND, OR, NAND, NOR, XOR και XNOR.
5. Οι πύλες δύο εισόδων μπορούν να επεκταθούν ώστε να έχουν περισσότερες από δύο εισόδους, εάν οι πράξεις τους έχουν την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα.
6. Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα ανήκουν σε μία Κλίμακα Ολοκλήρωσης (Scale Integration) ανάλογα με το πλήθος των ισοδύναμων με πύλες κυκλωμάτων που περιέχουν:
 - ✓ **SSI** (Small Scale Integration)
 - ✓ **MSI** (Medium Scale Integration)
 - ✓ **LSI** (Large Scale Integration)
 - ✓ **VLSI** (Very Large Scale Integration)
 - ✓ **ULSI** (Ultra Large Scale Integration)

Πίνακας 1.5.3 Πίνακες Αληθείας των πολλών

BUFFER	NOT																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>Y=A</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	Y=A	0	0	1	1	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>Y = \bar{A}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	Y = \bar{A}	0	1	1	0																		
A	Y=A																														
0	0																														
1	1																														
A	Y = \bar{A}																														
0	1																														
1	0																														
AND	OR																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y=A · B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y=A · B	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y=A+B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y=A+B	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
A	B	Y=A · B																													
0	0	0																													
0	1	0																													
1	0	0																													
1	1	1																													
A	B	Y=A+B																													
0	0	0																													
0	1	1																													
1	0	1																													
1	1	1																													
NAND	NOR																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y = $\overline{A \cdot B}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y = $\overline{A \cdot B}$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y = $\overline{A + B}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y = $\overline{A + B}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	Y = $\overline{A \cdot B}$																													
0	0	1																													
0	1	1																													
1	0	1																													
1	1	0																													
A	B	Y = $\overline{A + B}$																													
0	0	1																													
0	1	0																													
1	0	0																													
1	1	0																													
XOR	XNOR																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y=A ⊕ B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y=A ⊕ B	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y=A ⊙ B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y=A ⊙ B	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
A	B	Y=A ⊕ B																													
0	0	0																													
0	1	1																													
1	0	1																													
1	1	0																													
A	B	Y=A ⊙ B																													
0	0	1																													
0	1	0																													
1	0	0																													
1	1	1																													

1.6 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιώντας Πίνακα Αληθείας, να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$Y = \overline{\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Πράγματι, η σχέση $\overline{\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

ισχύει όπως φαίνεται από τον Πίνακα Αληθείας του Πίνακα 1.6.1.

Πίνακας 1.6.1 Πίνακας Αληθείας

για την απόδειξη της σχέσης $\overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

A	B	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$	$\overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}}$	$A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1

2. Χρησιμοποιώντας Πίνακα Αληθείας, να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

Πράγματι, η σχέση $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$ ισχύει όπως φαίνεται από τον Πίνακα Αληθείας του Πίνακα 1.6.2.

Πίνακας 1.6.2 Πίνακας Αληθείας

για την απόδειξη της σχέσης $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$

A	B	C	\overline{A}	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot C$	$B \cdot C$	$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C$	$A \cdot B + \overline{A} \cdot C$
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

3. Χρησιμοποιώντας Άλγεβρα Βοολε, να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\overline{A \oplus B} = A \odot B$

$$\begin{aligned}
 \overline{A \oplus B} &= \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} = \\
 &= \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = \\
 &= (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B}) = \\
 &= \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot A + B \cdot \overline{B} = \\
 &= 0 + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B + 0 = \\
 &= A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = A \odot B
 \end{aligned}$$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha. Y1 = (A + \bar{B}) \cdot (B \cdot \bar{B}) + (A+1) \cdot \bar{A}$$

$$\beta. Y2 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

$$\gamma. Y3 = (\bar{A} + A \cdot B) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$\delta. Y4 = ((A \cdot 1) + \bar{B}) + (A \cdot (0 + B))$$

$$\begin{aligned} \alpha. Y1 &= (A + \bar{B}) \cdot (B \cdot \bar{B}) + (A+1) \cdot \bar{A} = \\ &= (A + \bar{B}) \cdot 0 + 1 \cdot \bar{A} = \\ &= 0 + \bar{A} = \\ &= \bar{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. Y2 &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} = \\ &= (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C}) = \\ &= (\bar{A} + A) \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + (\bar{A} + A) \cdot B \cdot \bar{C} = \\ &= 1 \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + 1 \cdot B \cdot \bar{C} = \\ &= \bar{B} \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{C} = \\ &= (\bar{B} + B) \cdot \bar{C} = \\ &= 1 \cdot \bar{C} = \\ &= \bar{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma. Y3 &= (\bar{A} + A \cdot B) \cdot (\bar{A} + B) = \\ &= \bar{A} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{A} + A \cdot B \cdot B = \\ &= \bar{A} + \bar{A} \cdot B + (A \cdot \bar{A}) \cdot B + A \cdot (B \cdot B) = \\ &= \bar{A} + \bar{A} \cdot B + 0 \cdot B + A \cdot B = \\ &= \bar{A} + \bar{A} \cdot B + A \cdot B = \\ &= \bar{A} + (\bar{A} + A) \cdot B = \\ &= \bar{A} + 1 \cdot B = \\ &= \bar{A} + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta. Y4 &= ((A \cdot 1) + \bar{B}) + (A \cdot (0 + B)) = \\ &= (A + \bar{B}) + (A \cdot B) = \\ &= A + \bar{B} + A \cdot B = \\ &= (A + A \cdot B) + \bar{B} = \\ &= A + \bar{B} \text{ (Θεώρημα απορρόφησης)} \end{aligned}$$

