

1. Να μπορείτε να αναλύετε συνδυαστικά κυκλώματα.
2. Να μπορείτε να σχεδιάζετε συνδυαστικά κυκλώματα.
3. Να είστε ικανοί να απλοποιείτε λογικές συναρτήσεις.
4. Να σχεδιάζετε συνδυαστικά κυκλώματα με οικουμενικές πύλες
5. Να υλοποιείτε, στο εργαστήριο, συνδυαστικά κυκλώματα.
6. Να υλοποιείτε, στο εργαστήριο, συνδυαστικά κυκλώματα με οικουμενικές πύλες

## 3 κεφάλαιο

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ  
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

## 3.1 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

### 3.1.1 Ορισμός

Τα ψηφιακά κυκλώματα ανήκουν σε μία από τις δύο ακόλουθες βασικές κατηγορίες:

☞ συνδυαστικά κυκλώματα (combinational circuits)

☞ ακολουθιακά κυκλώματα (sequential circuits)

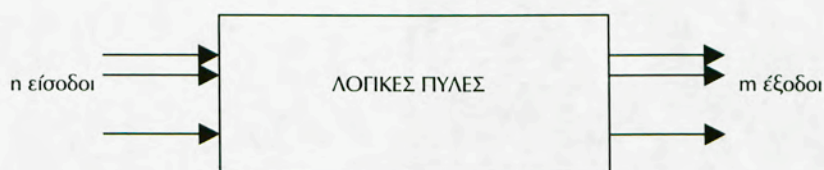
Ένα Συνδυαστικό Κύκλωμα (ΣΚ) αποτελείται από:

✓ εισόδους

✓ λογικές πύλες που συνδέονται μεταξύ τους

✓ εξόδους

όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1.



Σχήμα 3.1.1 Συνδυαστικό Κύκλωμα

Όταν ένα συνδυαστικό κύκλωμα έχει  $n$  εισόδους και  $m$  εξόδους, τότε για κάθε έναν από τους  $2^n$  δυνατούς συνδυασμούς εισόδων υπάρχει ένας και μόνον ένας δυνατός συνδυασμός εξόδων. Κάθε χρονική στιγμή, κάθε μία από τις εξόδους εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων την ίδια χρονική στιγμή.

### 3.1.2 Πίνακας Αλήθειας

Στον Πίνακα Αληθείας ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) καταγράφονται οι τιμές των εξόδων του ΣΚ για κάθε δυνατό συνδυασμό των τιμών των εισόδων του ΣΚ.

Ένα Συνδυαστικό Κύκλωμα που έχει  $n$  μεταβλητές εισόδους και  $m$  μεταβλητές εξόδους, έχει έναν Πίνακα Αληθείας. Ο πίνακας αυτός έχει στο αριστερό τμήμα  $n$  στήλες, όσες είναι και οι εισόδοι του κυκλώματος και στο δεξί τμήμα  $m$  στήλες, όσες είναι και οι εξοδοι του κυκλώματος. Το πλήθος των γραμμών του πίνακα είναι  $2^n$ , όσοι είναι και οι δυνατοί συνδυασμοί των εισόδων. Οι συνδυασμοί παράγονται σύμφωνα με την ακολουθία δυαδικής αρίθμησης του Πίνακα 2.3.1. Για κάθε έναν συνδυασμό εισόδων υπάρχει ένας και μόνον ένας δυνατός συνδυασμός εξόδων, που εξαρτάται από τη λειτουργία του κυκλώματος.

Για παράδειγμα, στον Πίνακα 3.1.1 παρουσιάζεται ο πίνακας αληθείας του συνδυαστικού κυκλώματος που εκτελεί την πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων (bits). Το κύκλωμα έχει δύο εισόδους  $x$  (πρώτος προσθετέος) και  $y$  (δεύτερος προσθετέος) και δύο εξόδους  $S$  (άθροισμα-sum) και  $C$  (κρατούμενο-carry).

**Πίνακας 1.2.1** Πίνακας Αληθείας συνδυαστικού κυκλώματος που εκτελεί πρόσθεση

Είσοδοι		Έξοδοι	
$x$	$y$	$S$	$C$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

### 3.1.3 Συναρτήσεις εξόδων

Σε ένα ΣΚ, κάθε χρονική στιγμή, κάθε μία από τις εξόδους εξαρτάται από τις εισόδους της ίδιας χρονικής στιγμής και μπορεί να εκφραστεί ως λογική συνάρτηση των μεταβλητών εισόδου. Όταν μία μεταβλητή έχει τιμή "1" στον πίνακα αληθείας, τότε εμφανίζεται ως έχει στη συνάρτηση, ενώ όταν έχει τιμή "0", τότε εμφανίζεται με το συμπλήρωμά της. Κάθε μεταβλητή λαμβάνει την κανονική της μορφή. Οι συναρτήσεις των εξόδων του ΣΚ προκύπτουν από τον Πίνακα Αληθείας του ΣΚ.

**Για παράδειγμα, από τον Πίνακα αληθείας 3.1.1 προκύπτει ότι:**

✓ η συνάρτηση εξόδου  $S$  έχει τιμή  $S=1$

όταν  $x=1$  και (AND)  $y=0$  ( $x \cdot \bar{y}$ )

ή (OR)

όταν  $x=0$  και (AND)  $y=1$  ( $\bar{x} \cdot y$ )

διαφορετικά έχει τιμή  $S=0$

επομένως

$$S = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y = x \oplus y$$

✓ η συνάρτηση εξόδου  $C$  έχει τιμή  $C=1$

όταν  $x=1$  και (AND)  $y=1$  ( $x \cdot y$ )

διαφορετικά έχει τιμή  $C=0$

επομένως

$$C = x \cdot y$$

### 3.1.4 Λογικό κύκλωμα

Οι συναρτήσεις εξόδων του ΣΚ μπορούν να υλοποιηθούν χρησιμοποιώντας λογικές πύλες, οπότε προκύπτει το λογικό κύκλωμα.



**Σχήμα 3.1.2** Λογικό κύκλωμα

Το λογικό κύκλωμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.2.

Για παράδειγμα, το ΣΚ με τις συναρτήσεις εξόδου που προέκυψαν στην παράγραφο 3.1.3 μπορεί να υλοποιηθεί με τις ακόλουθες πύλες:

- ✓ μία πύλη XOR
- ✓ μία πύλη AND

## 3.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου ενός ΣΚ οδηγεί σε απλούστερο (και οικονομικότερο) κύκλωμα.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν δύο μέθοδοι απλοποίησης λογικών συναρτήσεων:

- ☞ με χρήση της Άλγεβρας Boole
- ☞ με χρήση των χαρτών Karnaugh

### 3.2.1 Απλοποίηση με χρήση άλγεβρας BOOLE

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση της Άλγεβρας Boole, βασίζεται στη χρήση των Αξιωμάτων και των Θεωρημάτων της Άλγεβρας Boole (θα ήταν πολύ χρήσιμο να ξαναδιαβάζατε τον αντίστοιχο συγκεντρωτικό Πίνακα της Περιληψης του Κεφαλαίου 1).

Παραδείγματα.

1. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση  $Y = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

$$\begin{aligned} Y &= \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = \\ &= \bar{A} \cdot B \cdot (C + \bar{C}) = \\ &= \bar{A} \cdot B \end{aligned}$$

2. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση  $Y = (A+B) \cdot (A+\bar{B})$

$$\begin{aligned} Y &= (A+B) \cdot (A+\bar{B}) = \\ &= A \cdot A + A \cdot \bar{B} + B \cdot A + B \cdot \bar{B} = \\ &= A + A \cdot \bar{B} + A \cdot B + 0 = \\ &= (A + A \cdot B) + A \cdot \bar{B} = \\ &= A + A \cdot \bar{B} = \\ &= A \text{ (Θεώρημα Απορρόφησης)} \end{aligned}$$

3. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση  $Y = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{C}}$

$$\begin{aligned} Y &= \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{C}} = \\ &= \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}} = (\text{Θεώρημα De Morgan}) \\ &= (A+B) \cdot C \end{aligned}$$

### 3.2.2 Απλοποίηση με χάρτες KARNAUGH

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση των χαρτών Karnaugh είναι μία γραφική μέθοδος που βασίζεται σε μία διαφορετική αναπαράσταση των Πινάκων Αληθείας των λογικών συναρτήσεων και χρησιμοποιείται με ευκολία για απλοποίηση λογικών συναρτήσεων δύο, τριών και τεσσάρων μεταβλητών.

Ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης ονομάζονται τα γινόμενα όλων των όρων της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος (μεταβλητή) εμφανίζεται στην κανονική ή στη συμπληρωματική του μορφή.

Μία συνάρτηση  $n$  μεταβλητών έχει  $2^n$  ελάχιστους όρους.

Στον Πίνακα 3.2.1 παρουσιάζονται οι οκτώ ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης τριών μεταβλητών ( $2^3=8$ ).

**Πίνακας 3.2.1** Ελάχιστοι Όροι

A	B	C	Ελάχιστοι όροι
0	0	0	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	$m_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	$m_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	$m_3 = \overline{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	$m_4 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	$m_5 = A \cdot \overline{B} \cdot C$
1	1	0	$m_6 = A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	$m_7 = A \cdot B \cdot C$

**Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα ελάχιστων όρων.**

#### Παράδειγμα 1

Να εκφραστεί ως άθροισμα ελάχιστων όρων η συνάρτηση  $Y$  τριών μεταβλητών, ο πίνακας αληθείας της οποίας παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2.2.

Πίνακας 3.2.2 Πίνακας Αλήθειας της συνάρτησης Y

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Η συνάρτηση Y γράφεται ως άθροισμα ελάχιστων όρων:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

### Παράδειγμα 2

Να εκφραστεί η συνάρτηση τριών μεταβλητών  $Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$  ως άθροισμα ελαχίστων όρων

Η συνάρτηση δίνεται σε μορφή αθροίσματος γινομένων. Όμως σε κάθε γινόμενο δεν υπάρχουν όλοι οι όροι (μεταβλητές). Για τις μεταβλητές που λείπουν από κάθε γινόμενο του αθροίσματος, πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το άθροισμα της μεταβλητής, που λείπει και του συμπληρώματός της.

Αν για παράδειγμα, λείπει η μεταβλητή A από ένα γινόμενο, τότε πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το  $(A + \bar{A})$ . Έτσι, όλα τα γινόμενα μετατρέπονται σε ελάχιστους όρους. Επομένως, η συνάρτηση εκφράζεται ως άθροισμα ελαχίστων όρων.

Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} Y &= A \cdot B + \bar{A} \cdot C = \\ &= A \cdot B \cdot (C + \bar{C}) + \bar{A} \cdot (B + \bar{B}) \cdot C = \\ &= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \end{aligned}$$

### Αναπαράσταση λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh.

Οι χάρτες Karnaugh είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των λογικών συναρτήσεων. Ο χάρτης Karnaugh αποτελείται από τετράγωνα, το κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε έναν ελάχιστο όρο της λογικής συνάρτησης που αναπαριστά.

Οι χάρτες Karnaugh δύο, τριών και τεσσάρων μεταβλητών παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.2.1, 3.2.2 και 3.2.3, αντίστοιχα.

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	m0	m1
A	m2	m3

**Σχήμα 3.2.1** Χάρτης Karnaugh δύο μεταβλητών

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	m0	m1	m3	m2
A	m4	m5	m7	m6

**Σχήμα 3.2.2** Χάρτης Karnaugh τριών μεταβλητών

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	m0	m1	m3	m2
$\bar{A} \cdot B$	m4	m5	m7	m6
$A \cdot \bar{B}$	m12	m13	m15	m14
$A \cdot B$	m8	m9	m11	m10

**Σχήμα 3.2.3** Χάρτης Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών

Η αναπαράσταση μίας λογικής συνάρτησης με χάρτη Karnaugh γίνεται θέτοντας "1" σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο, όπου η συνάρτηση έχει τιμή "1" και "0" (ή τίποτα) σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο, όπου η συνάρτηση έχει τιμή "0".

### Παράδειγμα 1

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση δύο μεταβλητών  $Y(A,B) = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων, επομένως μπορεί να αναπαρασταθεί με το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.4.

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$		1
A	1	

**Σχήμα 3.2.4** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  $Y(A, B) = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

### Παράδειγμα 2

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών  $Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$

Η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων, επομένως μπορεί να αναπαρασταθεί με τον χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.5.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$			1	1
A	1	1		

**Σχήμα 3.2.5** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  $Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$

### Παράδειγμα 3

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών  $Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot C$

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$			1	
$A$		1	1	

**Σχήμα 3.2.6** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot C$$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων:

$$\begin{aligned} Y(A, B, C) &= \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot C = \\ &= \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot (B + \bar{B}) \cdot C = \\ &= \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.6.

Να παρατηρήσετε ότι:

- ο όρος  $\bar{A} \cdot B \cdot C$  της συνάρτησης αντιστοιχεί στο μπλε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=0$ ,  $B=1$  και  $C=1$
- ο όρος  $A \cdot C$  συνάρτησης αντιστοιχεί στα δύο κόκκινα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=1$  και  $C=1$

#### Παράδειγμα 4

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών  $Y(A, B, C, D) = A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{C} \cdot \bar{D}$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων (να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις):

$$\begin{aligned} Y(A, B, C, D) &= A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{C} \cdot \bar{D} = \\ &= A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot (D + \bar{D}) + (A + \bar{A}) \cdot (B + \bar{B}) \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} = \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + \\ &\quad + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με τον χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.7.

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	1			
$\bar{A} \cdot B$	1		1	1
$A \cdot \bar{B}$	1		1	
$A \cdot B$	1			

**Σχήμα 3.2.7** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y(A, B, C, D) = A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{C} \cdot \bar{D}$$

Να παρατηρήσετε ότι:

- ο όρος  $A \cdot B \cdot C \cdot D$  της συνάρτησης αντιστοιχεί στο μπλε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=1$ ,  $B=1$ ,  $C=1$  και  $D=1$
- ο όρος  $\bar{A} \cdot B \cdot C$  της συνάρτησης αντιστοιχεί στα δύο κόκκινα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=0$ ,  $B=1$  και  $C=1$

☞ ο όρος  $\overline{C} \cdot \overline{D}$  της συνάρτησης αντιστοιχεί στα τέσσερα πράσινα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $C=0$  και  $D=0$

Έτσι, με λίγη προσοχή θα μπορούσαμε να είχαμε αποφύγει τις πράξεις και να τοποθετούσαμε τους "1" της συνάρτησης κατευθείαν στο χάρτη Karnaugh.

### **Μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh.**

Η βασική ιδέα για την απλοποίηση μίας λογικής συνάρτησης χρησιμοποιώντας χάρτες Karnaugh, είναι η ακόλουθη:

*Γειτονικά τετράγωνα* σε ένα χάρτη Karnaugh ονομάζονται τα τετράγωνα που είναι σε συνεχόμενες οριζόντιες ή κάθετες θέσεις, αλλά **όχι διαγώνιες** θέσεις.

Το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων πρέπει να είναι δύναμη του 2, δηλαδή 2, 4, 8.

Έτσι, στο χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.3, τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_0$  και  $m_1$  είναι γειτονικά. Επίσης, γειτονικά είναι τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_{11}$  και  $m_{15}$ , τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_4$ ,  $m_5$ ,  $m_6$  και  $m_7$ , καθώς και τα 8 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_6$ ,  $m_7$ ,  $m_{10}$ ,  $m_{11}$ ,  $m_{14}$  και  $m_{15}$ .

Δεν είναι γειτονικά τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_5$  και  $m_{15}$ .

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των χαρτών Karnaugh είναι ότι είναι **αναδιπλούμενοι**. Η αναδίπλωση μπορεί να γίνει γύρω από την περίμετρο (τις εξωτερικές γραμμές) του χάρτη Karnaugh.

Έτσι, στο χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.3, τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_0$  και  $m_8$  είναι γειτονικά. Επίσης, γειτονικά είναι τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_4$  και  $m_6$ , τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_{10}$  και  $m_{11}$ , καθώς και τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους  $m_4$ ,  $m_6$ ,  $m_{12}$  και  $m_{14}$ .

**Δύο γειτονικά τετράγωνα σε ένα χάρτη Karnaugh αντιστοιχούν σε ελάχιστους όρους που διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή (η οποία εμφανίζεται με την πραγματική τιμή της στον έναν ελάχιστο όρο και με τη συμπληρωματική τιμή της στον άλλον ελάχιστο όρο). Αυτή η μεταβλητή μπορεί να απομακρυνθεί αν και στα δύο γειτονικά τετράγωνα έχει τεθεί "1". Αν λοιπόν ομαδοποιήσουμε 2 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1" τότε απομακρύνουμε μία μεταβλητή.**

Με την ίδια λογική, αν ομαδοποιήσουμε 4 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1", τότε απομακρύνουμε 2 μεταβλητές, αν ομαδοποιήσουμε 8 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1", τότε απομακρύνουμε 3 μεταβλητές.

Αν λοιπόν ομαδοποιήσουμε γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1" (επιτρέπεται να συμπεριληφθεί ένα τετράγωνο σε πολλές ομάδες γειτονικών τετραγώνων), τότε απομακρύνουμε μεταβλητές. Επομένως, επιτυγχάνεται η απλοποίηση της λογικής συνάρτησης που αναπαρίσταται με το χάρτη Karnaugh.

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

- ✎ Γράφουμε τη συνάρτηση με μορφή αθροίσματος γινομένων και τοποθετούμε τους "1" της συνάρτησης στο χάρτη Karnaugh.
- ✎ Δημιουργούμε ομάδες με "1" (δηλαδή όρους της συνάρτησης) των 2, 4, 8 μελών από γειτονικά τετράγωνα (οριζόντια, κάθετα και αναδιπλούμενα, αλλά όχι διαγώνια). Προσπαθούμε να δημιουργούμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερες ομάδες. Κάθε "1" μπορεί να συμμετάσχει σε περισσότερες από μία ομάδες. Όταν όλοι οι "1", που μπορούν να ομαδοποιηθούν, έχουν συμπεριληφθεί σε κάποια ομάδα, τότε δεν δημιουργούμε νέες ομάδες.
- ✎ Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση με όρους που αντιστοιχούν στις ομάδες (παραλείποντας τις μεταβλητές που μέσα στην ομάδα αλλάζουν τιμή) και τους όρους που δεν έχουν ομαδοποιηθεί.

	$\bar{B}$	$B$
$\bar{A}$		
$A$	1	1

**Σχήμα 3.2.8** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  
 $Y = A \cdot \bar{B} + A \cdot B$

### Παράδειγμα 1

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση δύο μεταβλητών  $Y(A,B) = A \cdot \bar{B} + A \cdot B$

Η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων. Τοποθετούμε τους "1" της συνάρτησης στον χάρτη Karnaugh, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.8.

Οι ελάχιστοι όροι  $A \cdot \bar{B}$  και  $A \cdot B$  δικαιολογούν την απομάκρυνση της μεταβλητής B.

Πράγματι, οι δύο "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται σε μία δυάδα: τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο A. Η ομαδοποίηση των δύο τετραγώνων έχει ως αποτέλεσμα την απομάκρυνση μίας μεταβλητής (της μεταβλητής B) και την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:  $Y = A$

### Παράδειγμα 2

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

Τοποθετούμε τους "1" της συνάρτησης στο χάρτη Karnaugh, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.9.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$			1	1
A	1	1		

**Σχήμα 3.2.9** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  
 $Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται σε δύο δυάδες:

- ✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $A \cdot \bar{B}$
- ✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{A} \cdot B$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

### Παράδειγμα 3

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.10.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$			1	
A	1		1	1

**Σχήμα 3.2.10** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  
 $Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

- ✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $B \cdot C$
- ✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο  $A \cdot \bar{C}$

Επειδή όλοι οι "1", που μπορούν να ομαδοποιηθούν, έχουν συμπεριληφθεί σε κάποια ομάδα, δεν δημιουργούμε νέες ομάδες (οι "1" της συνάρτησης στα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που αντιστοιχούν στους όρους  $A \cdot B \cdot C$  και  $A \cdot B \cdot \bar{C}$  δεν ομαδοποιούνται).

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = A \cdot \bar{C} + B \cdot C$$

#### Παράδειγμα 4

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A,B,C) = A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}$$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων (να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις):

$$\begin{aligned} Y(A,B,C) &= A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} = \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.11.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	1			1
A	1	1		1

Σχήμα 3.2.11 Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y(A, B, C) = A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}$$

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $A \cdot \bar{B}$

✓ τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{C}$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{C}$$

#### Παράδειγμα 5

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot C$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.12.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$		1	1	1
A		1	1	

Σχήμα 3.2.12 Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot C$$

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{A} \cdot B$

- ✓ τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο C

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = \bar{A} \cdot B + C$$

### Παράδειγμα 6

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών

$$\begin{aligned} Y(A,B,C,D) = & \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \\ & + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \\ & + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \\ & + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.13.

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	1	1		1
$\bar{A} \cdot B$	1	1		1
$A \cdot \bar{B}$	1	1		1
$A \cdot B$	1	1		

**Σχήμα 3.2.13** Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  $Y(A,B,C,D)$

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

- ✓ τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{A} \cdot \bar{D}$
- ✓ τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε πράσινο περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο  $B \cdot \bar{D}$
- ✓ τα οκτώ γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{C}$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{D} + B \cdot \bar{D} + \bar{C}$$

### Αδιάφοροι Όροι

Μία μεταβλητή εισόδου ή εξόδου ονομάζεται αδιάφορος όρος όταν δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της (αν είναι "0" ή "1"). Η τιμή ενός αδιάφορου όρου συμβολίζεται με X.

### 3.3 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Το πρόβλημα της Σχεδίασης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) είναι η σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ, όταν δίνεται η περιγραφή της λειτουργίας του.

Η μέθοδος σχεδίασης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ
2. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
3. Απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
4. Σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ

#### Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΚ

Να σχεδιαστεί ένα ΣΚ που αναγνωρίζει αν ένας 3-bits αριθμός είναι μικρότερος από 3, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOT και πύλες AND και OR δύο εισόδων.

Το ΣΚ έχει τρεις εισόδους A, B και C, που αποτελούν τη δυαδική αναπαράσταση ενός δεκαδικού αριθμού από το 0 έως και το 7 (θυμηθείτε ότι με 3 bits μπορούμε να παραστήσουμε  $2^3=8$  αριθμούς) και μία έξοδο Y. Η έξοδος του ΣΚ είναι "1" όταν το δεκαδικό ισοδύναμο του 3-bits δυαδικού αριθμού των εισόδων του ΣΚ είναι μικρότερο από 3.

#### Βήμα 1. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ

Από την περιγραφή της λειτουργίας του ΣΚ κατασκευάζεται ο Πίνακας Αληθείας του ΣΚ που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3.1.

Πίνακας 3.3.1 Πίνακας Αληθείας του Συνδυαστικού Κυκλώματος

δεκαδικός	A	B	C	Y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

#### Βήμα 2. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ

Από τον Πίνακα Αληθείας του ΣΚ προκύπτει ότι η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ είναι  $Y=1$  όταν

A=0 και (AND) B=0 και (AND) C=0

ή (OR)

A=0 και (AND) B=0 και (AND) C=1

ή (OR)

A=0 και (AND) B=1 και (AND) C=0

Επομένως, η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ ευρίσκεται ως συνάρτηση των εισόδων του ΣΚ:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

### Βήμα 3. Απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ

Η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας:

– τρεις πύλες NOT

για την εύρεση  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  και  $\bar{C}$

– πέντε πύλες AND δύο εισόδων

για τον υπολογισμό  $\bar{A} \cdot \bar{B}$ ,  $(\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot C$ ,  $(\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$ ,  $\bar{A} \cdot B$  και  $(\bar{A} \cdot B) \cdot \bar{C}$

– δύο πύλες OR δύο εισόδων

για τον υπολογισμό  $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$  και  $(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

Η απλοποίηση της συνάρτησης εξόδου του ΣΚ οδηγεί σε απλούστερο (και οικονομικότερο) κύκλωμα.

Η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ μπορεί να απλοποιηθεί (χρησιμοποιώντας Άλγεβρα Boole ή χάρτη Karnaugh):

$$Y(A, B, C) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = \overline{A + B \cdot C}$$

### Βήμα 4. Σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ

Για τη σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ, ξεκινώντας από την έξοδο προς τις εισόδους του κυκλώματος, σχεδιάζονται οι πύλες του κυκλώματος λαμβάνοντας υπόψη τις λογικές πράξεις των συναρτήσεων εξόδων του ΣΚ. Το λογικό κύκλωμα χωρίζεται σε επίπεδα που περιέχουν τις πύλες, με βάση την προτεραιότητα των πράξεων (παράγραφος 1.2.5 του Κεφαλαίου 1).

Ξεκινώντας από την έξοδο του ΣΚ προς τις εισόδους του ΣΚ, το κύκλωμα χωρίζεται σε τρία επίπεδα πυλών:

Επίπεδο 1.

Μία πύλη NOT που χρησιμοποιείται για την εύρεση της εξόδου  $\overline{A + B \cdot C}$  του ΣΚ, αποτελεί το τελευταίο επίπεδο πυλών.

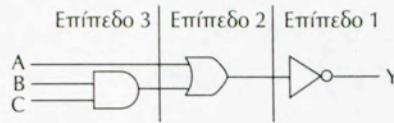
Επίπεδο 2.

Μία πύλη OR δύο εισόδων που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό  $A + B \cdot C$ , αποτελεί το δεύτερο επίπεδο πυλών.

Επίπεδο 3.

Μία πύλη AND δύο εισόδων, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό  $B \cdot C$ , αποτελεί το πρώτο επίπεδο πυλών.

Τα τρία επίπεδα πυλών φαίνονται στο Σχήμα 3.3.1, όπου παρουσιάζεται το λογικό κύκλωμα του ΣΚ που αναγνωρίζει αν ένας 3-bits αριθμός είναι μικρότερος από 3.



**Σχήμα 3.3.1** Συνδυαστικό Κύκλωμα

### 3.3.1 Συγκριτής μεγέθους δυαδικών αριθμών

Ο συγκριτής μεγέθους δύο 2-bits δυαδικών αριθμών είναι ένα συνδυαστικό κύκλωμα που έχει εισόδους τους δύο 2-bits δυαδικούς αριθμούς  $A=A_2A_1$  και  $B=B_2B_1$  και τρεις εξόδους που είναι "1", όταν οι αριθμοί είναι  $A < B$ ,  $A = B$  και  $A > B$ , αντίστοιχα.

Ο Πίνακας Αληθείας του συγκριτή παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3.2.

**Πίνακας 3.3.2** Πίνακας Αληθείας του συγκριτή μεγέθους

A		B		A < B	A = B	A > B
A2	A1	B2	B1	Y1	Y2	Y3
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Οι συναρτήσεις εξόδου του συγκριτή είναι:

$$Y1 = \overline{A2} \cdot \overline{A1} \cdot B1 + \overline{A1} \cdot B2 \cdot B1 + \overline{A2} \cdot B2$$

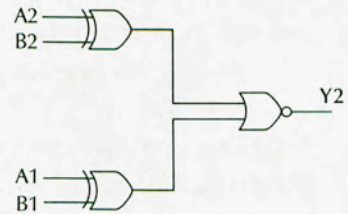
$$Y2 = \overline{A2} \cdot \overline{A1} \cdot \overline{B2} \cdot \overline{B1} + \overline{A2} \cdot A1 \cdot \overline{B2} \cdot B1 + A2 \cdot \overline{A1} \cdot B2 \cdot \overline{B1} + A2 \cdot A1 \cdot B2 \cdot B1$$

$$Y3 = A2 \cdot \overline{B2} + A2 \cdot A1 \cdot \overline{B1} + A1 \cdot \overline{B2} \cdot \overline{B1}$$

Ο συγκριτής ισότητας δύο 2-bits δυαδικών αριθμών είναι το συνδυαστικό κύκλωμα που αναγνωρίζει αν οι δύο 2-bits δυαδικοί αριθμοί είναι ίσοι ( $A=B$ ) και έχει έξοδο τη συνάρτηση  $Y2$ , η οποία μπορεί να γραφτεί ως εξής:

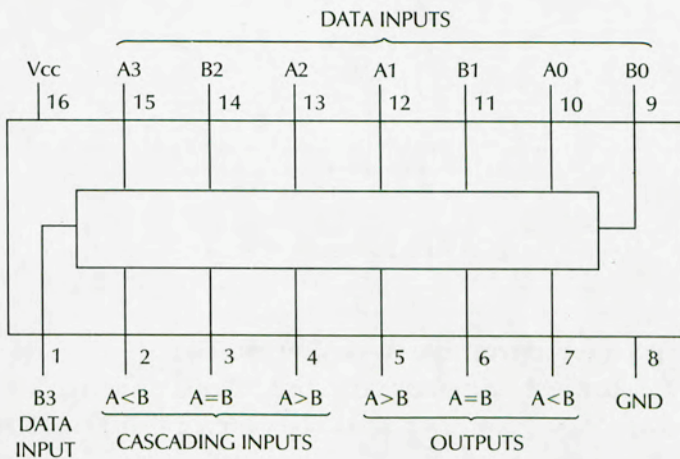
$$Y2 = \overline{(A2 \oplus B2) + (A1 \oplus B1)}$$

Ο συγκριτής ισότητας μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες XOR δύο εισόδων και μία πύλη NOR δύο εισόδων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.2.



**Σχήμα 3.3.2** Συγκριτής ισότητας

Στο Σχήμα 3.3.3 φαίνεται το Ο.Κ. 7485 που είναι ένας συγκριτής μεγέθους δύο 4-bits δυαδικών αριθμών.



**Σχήμα 3.3.3** Το Ο.Κ. 7485

Το Ο.Κ. έχει εισόδους τους δύο 4-bits δυαδικούς αριθμούς  $B=B3B2B1B0$  (ακροδέκτες 1, 14, 11 και 9) και  $A=A3A2A1A0$  (ακροδέκτες 15, 13, 12 και 10) και τρεις εξόδους που αντιστοιχούν στις συγκρίσεις  $A<B$ ,  $A=B$  και  $A>B$  (ακροδέκτες 7, 6 και 5 αντίστοιχα). Στο Ο.Κ. υπάρχουν τρεις εισόδοι (ακροδέκτες 2, 3 και 4)

που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση συγκριτών μεγαλύτερου μεγέθους. Για την σύγκριση δύο 4-bits δυαδικών αριθμών οι ακροδέκτες 2 και 4 τοποθετούνται στην λογική κατάσταση "0" και ο ακροδέκτης 3 τοποθετείται στην λογική κατάσταση "1".

### 3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

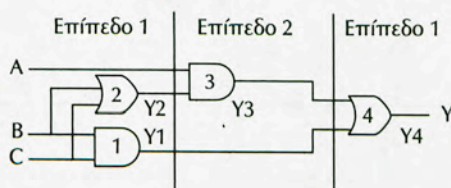
Το πρόβλημα της Ανάλυσης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) είναι η περιγραφή της λειτουργίας του ΣΚ, όταν δίνεται το λογικό κύκλωμα.

Η μέθοδος ανάλυσης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
2. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ
3. Περιγραφή της επιθυμητής λειτουργίας του ΣΚ

#### Παράδειγμα Ανάλυσης ΣΚ

Να προσδιοριστεί η λειτουργία του ΣΚ το λογικό κύκλωμα του οποίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4.1.



Σχήμα 3.4.1 Συνδυαστικό Κύκλωμα

#### Βήμα 1. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ

Το ΣΚ του Σχήματος 3.4.1 έχει τρεις εισόδους A, B και C και μία έξοδο Y. Το κύκλωμα αποτελείται από δύο πύλες AND δύο εισόδων (πύλες 1 και 3) και δύο πύλες OR (πύλες 2 και 4) δύο εισόδων.

Για την εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ, ξεκινώντας από τις εισόδους προς τις εξόδους του κυκλώματος, το κύκλωμα χωρίζεται σε επίπεδα πυλών και καταγράφονται οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών. Οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών του πρώτου επιπέδου είναι συναρτήσεις των εισόδων του ΣΚ. Οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών των επόμενων επιπέδων είναι συναρτήσεις των εξόδων των πυλών των προηγούμενων επιπέδων. Οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών του τελευταίου επιπέδου, που είναι οι συναρτήσεις εξόδων του ΣΚ, θα είναι προφανώς συναρτήσεις των εισόδων του ΣΚ.

Ξεκινώντας από τις εισόδους του ΣΚ προς την έξοδο του ΣΚ, το κύκλωμα χωρίζεται σε τρία επίπεδα πυλών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4.1:

Επίπεδο 1.

Οι πύλες 1 και 2 αποτελούν το πρώτο επίπεδο πυλών.

Η έξοδος της πύλης 1 είναι:

$$Y_1 = B \cdot C$$

και η έξοδος της πύλης 2 είναι:

$$Y_2 = B + C$$

Επίπεδο 2.

Η πύλη 3 αποτελεί το δεύτερο επίπεδο και η έξοδός της είναι:

$$Y_3 = A \cdot Y_2 = A \cdot (B + C)$$

Επίπεδο 3.

Η πύλη 4 αποτελεί το τρίτο (τελευταίο) επίπεδο και η έξοδός της είναι:

$$Y_4 = Y_1 + Y_3 = B \cdot C + A \cdot (B + C)$$

Η συνάρτηση εξόδου της πύλης 4 του τελευταίου επιπέδου είναι η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ:

$$Y = Y_4$$

Επομένως, η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ ευρίσκεται ως συνάρτηση των εισόδων του ΣΚ:

$$Y = Y_4 = A \cdot (B + C) + B \cdot C$$

## Βήμα 2. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ

Από τη συνάρτηση εξόδου του ΣΚ κατασκευάζεται ο Πίνακας Αληθείας του ΣΚ, που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.4.1.

**Πίνακας 3.4.1** Πίνακας Αληθείας του Συνδυαστικού Κυκλώματος

A	B	C	$Y_1 = B \cdot C$	$Y_2 = B + C$	$Y_3 = A \cdot (B + C)$	$Y = Y_4 = A \cdot (B + C) + B \cdot C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

### Βήμα 3. Περιγραφή της επιθυμητής λειτουργίας του ΣΚ

Από τον Πίνακα αληθείας του ΣΚ, παρατηρούμε ότι:

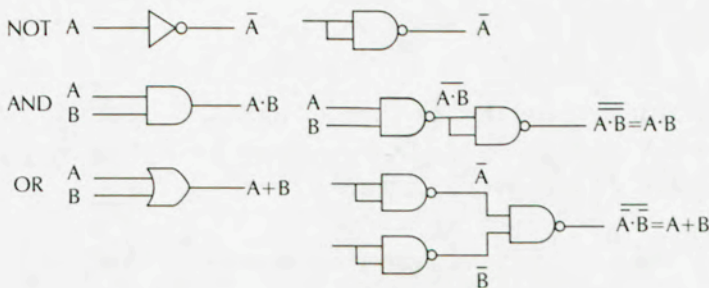
- η έξοδος του ΣΚ είναι "1", όταν οι δύο από τις τρεις εισόδους του είναι "1" ή όταν όλες οι εισοδοί του είναι "1"
- η έξοδος του ΣΚ είναι "0", όταν οι δύο από τις τρεις εισόδους του είναι "0" ή όταν όλες οι εισοδοί του είναι "0"

Επομένως, η έξοδος του ΣΚ είναι "1", όταν οι περισσότερες από τις εισόδους του ΣΚ είναι "1" και η έξοδος του ΣΚ είναι "0", όταν οι περισσότερες από τις εισόδους του ΣΚ είναι "0", δηλαδή το ΣΚ υλοποιεί τη *συνάρτηση πλειοψηφίας*.

## 3.5 ΟΙΚΟΥΜΕΝΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

Κάθε ψηφιακό κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί με πύλες NOT, AND και OR, οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να υλοποιηθούν μόνο με πύλες NAND ή NOR. Επομένως, κάθε ψηφιακό κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες NAND ή NOR που ονομάζονται *οικουμενικές πύλες* (universal gates). Η υλοποίηση ψηφιακών κυκλωμάτων με οικουμενικές πύλες οδηγεί σε οικονομικές και τεχνικά αποτελεσματικές κατασκευές.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τις οικουμενικές πύλες NAND. Η υλοποίηση των πυλών NOT, AND και OR μόνο με πύλες NAND φαίνεται στο Σχήμα 3.5.1.



**Σχήμα 3.5.1** Υλοποίηση των πυλών NOT, AND και OR μόνο με πύλες NAND

Η μέθοδος σχεδίασης συνδυαστικού κυκλώματος μόνο με πύλες NAND είναι η ακόλουθη:

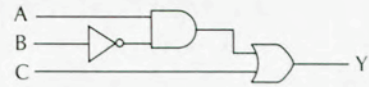
- ☛ σχεδίαση του κυκλώματος με πύλες NOT, AND και OR
- ☛ αντικατάσταση των πυλών NOT, AND και OR από πύλες NAND (σύμφωνα με το Σχήμα 3.5.1)
- ☛ διαγραφή δύο συνεχόμενων πυλών NAND με βραχυκυκλωμένες εισόδους, που λειτουργούν ως πύλες NOT

Στη συνέχεια, δίνεται ένα παράδειγμα υλοποίησης συνδυαστικού κυκλώματος μόνο με πύλες NAND 2 εισόδων

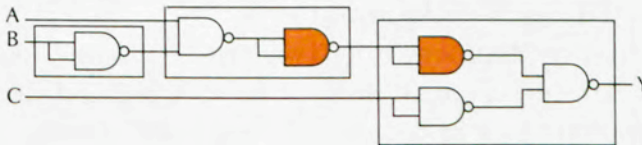
Ένα συνδυαστικό κύκλωμα έχει τρεις εισόδους A, B και C και μία έξοδο  $Y = A \cdot \bar{B} + C$

Η υλοποίηση του κυκλώματος με πύλες NOT, AND και OR απαιτεί μία πύλη NOT, μία πύλη AND και μία πύλη OR, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5.2.

Η αντικατάσταση των πυλών NOT, AND και OR από πύλες NAND (σύμφωνα με το Σχήμα 3.5.1) οδηγεί στην υλοποίηση του κυκλώματος με έξι πύλες NAND, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5.3.

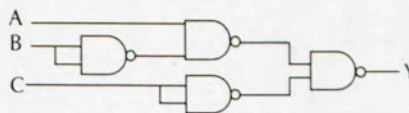


**Σχήμα 3.5.2** Υλοποίηση της  $Y = A \cdot \bar{B} + C$  με πύλες NOT, AND και OR



**Σχήμα 3.5.3** Αντικατάσταση των πυλών NOT, AND και OR από πύλες NAND  
Υλοποίηση της  $Y = A \cdot \bar{B} + C$  μόνο με πύλες NAND

Η διαγραφή δύο συνεχόμενων πυλών NAND (απαλοιφή NOT-NOT) οδηγεί στην υλοποίηση του κυκλώματος με τέσσερις πύλες NAND 2 εισόδων σε πολλά επίπεδα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5.4.



**Σχήμα 3.5.4** Διαγραφή δύο συνεχόμενων πυλών NAND με βραχυκυκλωμένες εισόδους  
Υλοποίηση της  $Y = A \cdot \bar{B} + C$  μόνο με πύλες NAND 2 εισόδων

## 3.6 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Σε ένα συνδυαστικό κύκλωμα που έχει  $n$  εισόδους και  $m$  εξόδους, για κάθε έναν από τους  $2^n$  δυνατούς συνδυασμούς εισόδων υπάρχει ένας και μόνον ένας δυνατός συνδυασμός εξόδων. Κάθε χρονική στιγμή, κάθε μία από τις εξόδους εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων την ίδια χρονική στιγμή.

2. Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ελάχιστων όρων. Ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης ονομάζονται τα γινόμενα όλων των όρων της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος (μεταβλητή) εμφανίζεται στην κανονική ή στη συμπληρωματική του μορφή.

3. Η απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου ενός συνδυαστικού κυκλώματος οδηγεί σε απλούστερο κύκλωμα. Η απλοποίηση γίνεται με χρήση της Άλγεβρας Boole ή των χαρτών Karnaugh.

4. Το πρόβλημα της σχεδίασης ενός συνδυαστικού κυκλώματος (ΣΚ) είναι η σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ, όταν δίνεται η περιγραφή της λειτουργίας του.

Η μέθοδος σχεδίασης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

- ✓ Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ
- ✓ Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
- ✓ Απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
- ✓ Σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ

5. Το πρόβλημα της Ανάλυσης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) είναι η περιγραφή της λειτουργίας του ΣΚ, όταν δίνεται το λογικό κύκλωμα.

Η μέθοδος ανάλυσης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

- ✓ Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
- ✓ Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ
- ✓ Περιγραφή της επιθυμητής λειτουργίας του ΣΚ

6. Οι πύλες NAND και NOR ονομάζονται οικουμενικές, γιατί κάθε ψηφιακό κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες NAND ή μόνο με πύλες NOR.

### 3.7 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εκφρασθεί η συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot C$$

– χρησιμοποιώντας μόνο πράξεις OR και NOT

– χρησιμοποιώντας μόνο πράξεις AND και NOT

Η συνάρτηση Y μπορεί να εκφρασθεί χρησιμοποιώντας μόνο πράξεις OR και NOT:

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot C = \overline{A+B} + \overline{A+\bar{C}} + \overline{B+\bar{C}}$$

Η συνάρτηση Y μπορεί να εκφρασθεί χρησιμοποιώντας μόνο πράξεις AND και NOT:

$$Y = \bar{Y} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot C} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} \cdot \overline{\bar{A} \cdot C} \cdot \overline{\bar{B} \cdot C}$$

2. Να εκφρασθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών  $Y = (A \cdot B + C) \cdot (B + A \cdot C)$  ως άθροισμα ελαχίστων όρων

$$\begin{aligned}
Y &= (A \cdot B + C) \cdot (B + A \cdot C) = \\
&= A \cdot B \cdot B + A \cdot B \cdot A \cdot C + C \cdot B + C \cdot A \cdot C = \\
&= A \cdot B + A \cdot B \cdot C + C \cdot B + C \cdot A = \\
&= A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A = \\
&= A \cdot B \cdot (C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C + A \cdot (B + \bar{B}) \cdot C = \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C = \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C
\end{aligned}$$

3. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών  
 $Y(A,B,C) = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

Τοποθετούμε τους "1" της συνάρτησης στον παρακάτω χάρτη Karnaugh:

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	1			1
A			1	1

Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  $Y(A,B,C) = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

Να παρατηρήσετε ότι:

- ✓ ο όρος  $A \cdot B$  συνάρτησης αντιστοιχεί στα δύο τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=1$  και  $B=1$
  - ✓ ο όρος  $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$  της συνάρτησης αντιστοιχεί στο τετράγωνο του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=0$ ,  $B=0$  και  $C=0$
  - ✓ ο όρος  $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$  της συνάρτησης αντιστοιχεί στο τετράγωνο του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών  $A=0$ ,  $B=1$  και  $C=0$
- Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:
- ✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $A \cdot B$
  - ✓ τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{A} \cdot \bar{C}$
- Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

4. Να απλοποιηθεί η συνάρτηση  $Y$  τεσσάρων μεταβλητών με τον ακόλουθο Πίνακα Αληθείας:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$	$C \cdot D$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$			1	1
$\bar{A} \cdot B$				
$A \cdot B$	1	1	1	1
$A \cdot \bar{B}$			1	1

Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης  $Y$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο χάρτη Karnaugh:

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

✓ τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο

περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο  $A \cdot B$

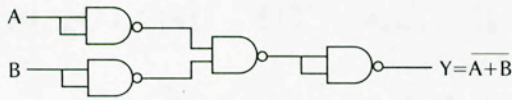
✓ τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο  $\bar{B} \cdot C$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = A \cdot B + \bar{B} \cdot C$$

5. Να υλοποιηθεί μία πύλη NOR δύο (2) εισόδων χρησιμοποιώντας πύλες NAND δύο (2) εισόδων.

Η πύλη NOR δύο (2) εισόδων είναι μία πύλη OR ακολουθούμενη από μία πύλη NOT. Η αντικατάσταση των πυλών OR και NOT από πύλες NAND (σύμφωνα με το Σχήμα 3.5.1) οδηγεί στην υλοποίηση της πύλης NOR με τέσσερις πύλες NAND, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα:



6. Να σχεδιαστεί ένα συνδυαστικό κύκλωμα που αναγνωρίζει, αν ένας 3-bits αριθμός είναι μικρότερος από 2, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOR δύο (2) εισόδων.

Το συνδυαστικό κύκλωμα έχει τρεις εισόδους A, B και C και μία έξοδο Y που είναι ίση με "1" αν ο δεκαδικός ισοδύναμος του δυαδικού αριθμού ABC είναι μικρότερος από 2.

Ο Πίνακας Αληθείας του κυκλώματος είναι ο παρακάτω:

Πίνακας Αληθείας του κυκλώματος

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Η συνάρτηση Y μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο χάρτη Karnaugh:

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	1	1		
A				

Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης Y

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα De Morgan, η συνάρτηση Y γράφεται:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A + B}$$

Επομένως, το συνδυαστικό κύκλωμα που αναγνωρίζει αν ένας 3-bits αριθμός είναι μικρότερος από 2 μπορεί να υλοποιηθεί, χρησιμοποιώντας μόνο μία πύλη NOR δύο (2) εισόδων.

### 3.8 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να εξηγήσετε τι είναι συνδυαστικό κύκλωμα.
2. Τι είναι ελάχιστοι όροι;
3. Ποιες πύλες ονομάζονται οικουμενικές και γιατί;
4. Κάθε Συνδυαστικό Κύκλωμα μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας μόνο πύλες:  
 α) OR     β) AND     γ) XOR     δ) NAND

5. Ποιες από τις παρακάτω λογικές συναρτήσεις τριών μεταβλητών είναι σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων;
 

α. $Y1 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$	ΝΑΙ <input type="checkbox"/>	ΟΧΙ <input type="checkbox"/>
β. $Y2 = A \cdot B + A \cdot C$	ΝΑΙ <input type="checkbox"/>	ΟΧΙ <input type="checkbox"/>
γ. $Y3 = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{C}$	ΝΑΙ <input type="checkbox"/>	ΟΧΙ <input type="checkbox"/>
δ. $Y4 = A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$	ΝΑΙ <input type="checkbox"/>	ΟΧΙ <input type="checkbox"/>

6. Ο χάρτης Karnaugh της λογικής συνάρτησης τριών μεταβλητών:

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot \bar{C} + B \cdot C$$

είναι:  
α)

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	1	1	1	
A			1	

β)

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	1		1	1
A			1	

7. Ο παρακάτω χάρτης Karnaugh της λογικής συνάρτησης τριών μεταβλητών  $Y(A,B,C)$

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$	1		1	
A			1	

αντιστοιχεί στον Πίνακα Αληθείας:

α) 

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

β) 

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

8. Να εκφράσετε την παρακάτω λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών:

$$Y(A,B,C) = A \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

ως άθροισμα ελάχιστων όρων.

9. Χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh, να απλοποιήσετε την λογική συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών με τον παρακάτω Πίνακα Αληθείας:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

10. Να απλοποιήσετε την παρακάτω συνάρτηση Boole τεσσάρων μεταβλητών:

$$Y(A,B,C,D) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D$$

11. Δίνεται ο παρακάτω χάρτης Karnaugh μίας λογικής συνάρτησης τριών μεταβλητών Y:

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
$\bar{A}$		1		
A	1	1	1	1

Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση και να την υλοποιήσετε μόνο με πύλες NAND δύο (2) εισόδων.

12. Να απλοποιήσετε την παρακάτω λογική συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών:

$$Y(A,B,C,D) = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D + A \cdot C \cdot D + \bar{B} \cdot \bar{D}$$

Να υλοποιήσετε την απλοποιημένη συνάρτηση χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND δύο (2) εισόδων.

13. Να βρείτε την έξοδο Y συναρτήσει των εισόδων A, B και C του παρακάτω κυκλώματος:



14. Να σχεδιάσετε ένα συνδυαστικό κύκλωμα η έξοδος Y του οποίου θα ενεργοποιεί ένα συναγερμό αυτοκινήτου (ο συναγερμός ενεργοποιείται με "1"). Το κύκλωμα έχει τρεις εισόδους A, B και C, που συνδέονται με τρεις διακόπτες οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με τρεις αισθητήρες (sensors) SA, SB και SC που ελέγχουν αντίστοιχα: αν η μηχανή είναι σε λειτουργία, αν κάποια πόρτα είναι ανοικτή και αν το "καπό" της μηχανής είναι ανοικτό. Ο συναγερμός πρέπει να ενεργοποιείται όταν η μηχανή είναι σε λειτουργία και ταυτόχρονα, είτε κάποια πόρτα είναι ανοικτή, είτε το "καπό" της μηχανής είναι ανοικτό.

Να κατασκευάσετε τον Πίνακα αληθείας του προβλήματος. Να γράψετε τη συνάρτηση εξόδου Y του κυκλώματος ως άθροισμα ελαχίστων όρων των μεταβλητών εισόδου A, B και C. Χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh να απλοποιήσετε τη συνάρτηση εξόδου. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα όπου να φαίνονται τα επίπεδα των πυλών με βάση την προτεραιότητα των πράξεων της απλοποιημένης συνάρτησης εξόδου.

15. Να σχεδιάσετε ένα συνδυαστικό κύκλωμα η έξοδος Y του οποίου θα ενεργοποιεί ένα συναγερμό μίας χημικής μονάδας (ο συναγερμός ενεργοποιείται με "1"). Το κύκλωμα έχει τρεις εισόδους A, B και C, που συνδέονται με τρεις διακόπτες οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με τρεις αισθητήρες (sensors) SA, SB και SC που ελέγχουν αντίστοιχα την πίεση, τη θερμοκρασία και τη στάθμη

ενός υγρού μέσα σε μία δεξαμενή. Ο αισθητήρας SA δίνει “1”, όταν η πίεση υπερβεί κάποιο προκαθορισμένο όριο. Ο αισθητήρας SB δίνει “1”, όταν η θερμοκρασία υπερβεί κάποιο προκαθορισμένο όριο. Ο αισθητήρας SC δίνει “0”, όταν η στάθμη πέσει κάτω από κάποιο προκαθορισμένο όριο. Ο συναγερμός πρέπει να ενεργοποιείται, όταν η στάθμη πέσει κάτω από το προκαθορισμένο όριο και ταυτόχρονα η πίεση, είτε η θερμοκρασία υπερβούν τα προκαθορισμένα όρια.

Να κατασκευάσετε τον Πίνακα αληθείας του προβλήματος. Να γράψετε τη συνάρτηση εξόδου  $Y$  του κυκλώματος ως άθροισμα ελαχίστων όρων των μεταβλητών εισόδου  $A$ ,  $B$  και  $C$ . Χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh να απλοποιήσετε τη συνάρτηση εξόδου. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα όπου να φαίνονται τα επίπεδα των πυλών με βάση την προτεραιότητα των πράξεων της απλοποιημένης συνάρτησης εξόδου.

## ΕΡΓΑΣΙΕΣ

### Εργασία 1

Ένα βενζινάδικο έχει τέσσερις δεξαμενές καυσίμων. Στη δεξαμενή της βενζίνης super υπάρχει ένας αισθητήρας SA που δίνει “1”, όταν η στάθμη πέσει κάτω από κάποιο προκαθορισμένο όριο. Στη δεξαμενή της βενζίνης unleaded υπάρχει ένας αισθητήρας SB που δίνει “1”, όταν η στάθμη πέσει κάτω από κάποιο προκαθορισμένο όριο. Στη δεξαμενή της βενζίνης super unleaded υπάρχει ένας αισθητήρας SC που δίνει “1”, όταν η στάθμη πέσει κάτω από κάποιο προκαθορισμένο όριο. Στη δεξαμενή του πετρελαίου κίνησης υπάρχει ένας αισθητήρας SD που δίνει “1”, όταν η θερμοκρασία υπερβεί κάποιο προκαθορισμένο όριο.

Να σχεδιάσετε ένα συνδυαστικό κύκλωμα με τέσσερις εισόδους  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$ , που συνδέονται με τέσσερις διακόπτες οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με τους τέσσερις αισθητήρες και μία έξοδο  $Y$  που δίνει “1”, όταν η στάθμη τουλάχιστον μίας από τις δεξαμενές βενζίνης πέσει κάτω από το προκαθορισμένο όριο και ταυτόχρονα η θερμοκρασία της δεξαμενής του πετρελαίου κίνησης υπερβεί το προκαθορισμένο όριο.

### Εργασία 2

Σε μία διασταύρωση, διασταυρώνεται ένας δρόμος προτεραιότητας με λωρίδες  $LA$  και  $LB$  και ένας δρόμος δευτερεύουσας σημασίας με λωρίδες  $LC$  και  $LD$ . Σε κάθε λωρίδα υπάρχει ένας αισθητήρας που ελέγχει την παρουσία αυτοκινήτων δίνοντας “1”, όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα αυτοκίνητο. Στη διασταύρωση υπάρχει ένας

σηματοδότης με δύο φώτα: το ΦΑΒ για τις λωρίδες ΛΑ και ΛΒ και το ΦCD για τις λωρίδες ΛC και ΛD. Το κάθε φως είναι δύο χρωμάτων (κόκκινο και πράσινο). Ο σηματοδότης ελέγχει την κυκλοφορία των αυτοκινήτων σύμφωνα με την ακόλουθη λογική:

Το ΦCD είναι πράσινο όταν

– οι λωρίδες ΛC και ΛD είναι κατειλημμένες και τουλάχιστον μία από τις λωρίδες ΛΑ και ΛΒ είναι ελεύθερη

– η λωρίδα ΛC ή η λωρίδα ΛD είναι κατειλημμένη και οι λωρίδες ΛΑ και ΛΒ είναι ελεύθερες

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το ΦCD είναι κόκκινο.

Το ΦΑΒ λειτουργεί εντελώς αντίθετα από το ΦCD.

Να σχεδιάσετε ένα συνδυαστικό κύκλωμα που ελέγχει το σηματοδότη της διασταύρωσης, σύμφωνα με τις παραπάνω προδιαγραφές. Το κύκλωμα έχει τέσσερις εισόδους A, B, C και D που συνδέονται με τους τέσσερις αισθητήρες και δύο εξόδους YAB και YCD, που συνδέονται με τα φώτα του σηματοδότη και δίνουν "1", όταν το αντίστοιχο φως είναι πράσινο.