1. Να γράφετε αρνητικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή.
2. Να βρίσκετε το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού.
3. Να βρίσκετε το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός δυαδικού αριθμού.
4. Να κάνετε πράξεις με προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς.
5. Να σχεδιάζετε και να κατασκευάζετε κυκλώματα ημιαθροιστών και πλήρων αθροιστών.
6. Να σχεδιάζετε και να κατασκευάζετε απλά αριθμητικά κυκλώματα.
7. Να μελετάτε τα φυλλάδια των κατασκευαστών αθροιστών σε ολοκληρωμένη μορφή και να σχεδιάζετε μ' αυτά απλά κυκλώματα αθροιστών-αφαιρετών.
8. Να γνωρίζετε τον τρόπο πρόσθεσης δύο BCD αριθμών.

9 κεφάλαιο

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

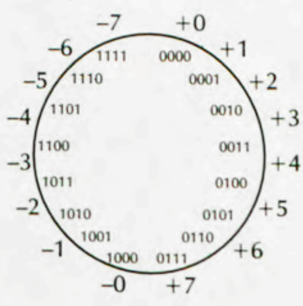
9.1 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μέσα σε ένα ψηφιακό σύστημα, όλα τα δεδομένα, είτε είναι χαρακτήρες είτε αριθμοί, αναπαριστώνται με μια ακολουθία από δυαδικά ψηφία. Αυτή η αναπαράσταση είναι απλή όσο δεν έχουμε αρνητικούς αριθμούς. Οι σχεδιαστές ψηφιακών συστημάτων έχουν αναπτύξει τρείς διαφορετικές τεχνικές για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών: *πρόσημο και μέτρο*, *συμπλήρωμα ως προς ένα*, και *συμπλήρωμα ως προς δύο*. Στις επόμενες παραγράφους θα αναλύσουμε αυτές τις τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ψηφιακών κυκλωμάτων για την πρόσθεση και αφαίρεση προσημασμένων δυαδικών αριθμών.

Στα μαθηματικά μπορούμε να έχουμε ένα άπειρο αριθμό θετικών και αρνητικών ακεραίων. Στα ψηφιακά συστήματα μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα συγκεκριμένο αριθμό ακεραίων ανάλογα με τον αριθμό των bit που χρησιμοποιούμε για να τους αναπαραστήσουμε. Στα περισσότερα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα χρησιμοποιούνται 32 bits για την αναπαράσταση των ακεραίων αριθμών. Στις επόμενες παραγράφους θα υποθέσουμε ότι η αναπαράσταση των ακεραίων γίνεται με 4 bits. Έτσι θα μπορούμε να αναπαραστήσουμε 16 $(=2^4)$ ακεραίους από τους οποίους οι μισοί θα είναι θετικοί και οι άλλοι μισοί θετικοί. Κάθε μία από τις τρεις τεχνικές που αναφέραμε αναπαριστά τους αρνητικούς αριθμούς με διαφορετικό τρόπο.

9.1.1 Αναπαράσταση Προσημασμένου Μέτρου

Στην **Αναπαράσταση Προσημασμένου Μέτρου**, το περισσότερο σημαντικό bit (MSB) χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει το πρόσημο του αριθμού, ενώ τα υπόλοιπα bits αναπαριστούν το μέτρο (απόλυτη τιμή) σαν ένα δυαδικό μέγεθος χωρίς πρόσημο. Αν το bit του πρόσημου είναι 0, ο αριθμός είναι θετικός. Αν το bit του πρόσημου είναι 1, ο αριθμός είναι αρνητικός. Για να μετατρέψουμε ένα θετικό αριθμό σε αρνητικό, απλά αντικαθιστούμε το bit του πρόσημου του ("0") με το συμπλήρωμά του ("1").



Σχήμα 9.1.1 *Αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου*

Το σχήμα 9.1.1 δείχνει ένα "τροχό αριθμών" για την αναπαράσταση των αριθμών 4 bits. Το σχήμα δείχνει τους δυαδικούς αριθμούς σε αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου και τους ισοδύναμους ακέραιους δεκαδικούς. Ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που μπορεί να αναπαρασταθεί με τρία bits για το μέτρο είναι ο $+7=2^3-1$ ενώ ο μικρότερος αρνητικός αριθμός είναι ο -7.

Το μηδέν έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις, αν και το +0 και το –0 δεν έχουν κάποιο νόημα στα μαθηματικά.

Για παράδειγμα, η αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου του δεκαδικού αριθμού + 6 είναι:

	MSB			LSB
Πρόσημο	**0**	1	1	0

ενώ η αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου του δεκαδικού αριθμού -6 είναι:

	MSB			LSB
Πρόσημο	**1**	1	1	0

Η πρόσθεση δύο θετικών ή αρνητικών αριθμών είναι απλή. Απλά προσθέτουμε τους αριθμούς και δίνουμε το ίδιο πρόσημο στο αποτέλεσμα. Όταν τα πρόσημα των δύο αριθμών δεν είναι ίδια, τότε η πρόσθεση γίνεται πολύπλοκη (πρέπει να αφαιρέσουμε το μικρότερο μέτρο από το μεγαλύτερο και το πρόσημο είναι αυτό του αριθμού με το μεγαλύτερο μέτρο). Αυτή η πολυπλοκότητα έκανε τους σχεδιαστές ψηφιακών συστημάτων να προτείνουν άλλες τεχνικές αναπαράστασης των αρνητικών αριθμών, ώστε να κατασκευάζονται απλούστερα τα κυκλώματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.

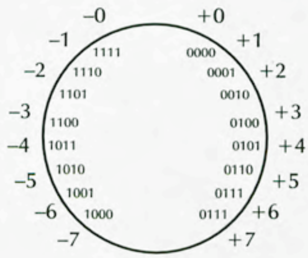
9.1.2 Αναπαράσταση Συμπληρώματος ως προς ένα

Στην αναπαράσταση **συμπληρώματος ως προς ένα (ones complement)** οι θετικοί αριθμοί (και το μηδέν) αναπαρίστανται όπως στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου. Κάθε αρνητικός αριθμός είναι το συμπλήρωμα ως προς ένα του αντίστοιχου θετικού.

Θα παρουσιάσουμε μία απλή μέθοδο για την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα ενός ακεραίου. **Το συμπλήρωμα ως προς ένα προκύπτει με την αντικατάσταση κάθε bit του αριθμού με το συμπλήρωμά του.** Έτσι για παράδειγμα –7=1000 αφού +7=0111.

MSB			LSB	
0	1	1	1	+7
↓	↓	↓	↓	↓
1	0	0	0	-7

Ο "τροχός των αριθμών" για την Αναπαράσταση του Συμπληρώματος ως προς ένα των αριθμών των 4-bits φαίνεται στο Σχήμα 9.1.2. Όλοι οι αρνητικοί αριθμοί έχουν 1 στο πρόσημό τους, ενώ οι θετικοί έχουν 0. Το μηδέν έχει δύο αναπαραστάσεις, όπως στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

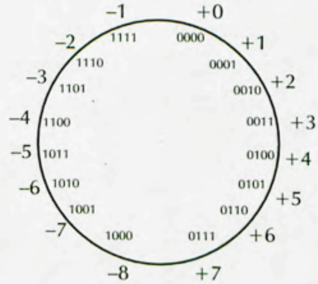


Σχήμα 9.1.2 *Αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 1*

Το πλεονέκτημα των αριθμών συμπληρώματος ως προς ένα είναι η ευκολία με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε αρνητικούς αριθμούς. Η αφαίρεση γίνεται προσθέτοντας στο μειωτέο τον αντίστοιχο αρνητικό του αφαιρετέου: A-B=A+(−B). Όμως η αφαίρεση περιπλέκεται λόγω της ύπαρξης δύο αναπαραστάσεων του μηδενός και γι' αυτό το λόγο καταλήγουμε να χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση συμπλήρωματος ως προς δύο, η οποία απλοποιεί την αφαίρεση όπως θα περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

9.1.3 Αναπαράσταση Συμπληρώματος ως προς δύο

Στην αναπαράσταση του **συμπληρώματος ως προς δύο (twos complement)** οι θετικοί αριθμοί (και το μηδέν) αναπαρίστανται όπως στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου. Κάθε αρνητικός αριθμός είναι το συμπλήρωμα ως προς δύο του αντίστοιχου θετικού. Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο έχουμε μόνο μία αναπαράσταση για το μηδέν και όχι δύο όπως έχουμε στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα. Στο Σχήμα 9.1.3 φαίνεται η αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο των αριθμών των 4 bits.



Σχήμα 9.1.3 *Αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2*

Θα παρουσιάσουμε μία απλή μέθοδο για την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο ενός ακεραίου. **Το συμπλήρωμα ως προς δύο προκύπτει προσθέτοντας το 1 στο συμπλήρωμα ως προς ένα του αριθμού**. Για παράδειγμα, +7=0111, ενώ το συμπλήρωμά του ως προς 1 είναι 1000 και προσθέτοντας 1 παίρνουμε τον 1001 που είναι η αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο του –7.

0111	+7
1000	Συμπλήρωμα ως προς 1
+ 1	
1001	(-7) Συμπλήρωμα ως προς 2

Ενας μνημονικός κανόνας για την εύρεση του συμπληρώματος ως προς δύο ενός αριθμού είναι ο ακόλουθος: Ξεκινώντας από το LSB και μέχρι και τον πρώτο 1 τα bits διατηρούνται ως έχουν. Τα υπόλοιπα bits αντικαθίστανται από το συμπλήρωμά τους.

Η αφαίρεση γίνεται προσθέτοντας στο μειωτέο τον αντίστοιχο αρνητικό του αφαιρετέου. Όμως η αφαίρεση είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί λόγω της ύπαρξης μίας αναπαραστάσεων του μηδενός. Το συμπλήρωμα ως προς δύο χρησιμοποιείται σήμερα σε όλα τα ψηφιακά συστήματα για την πραγματοποίηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

9.1.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση Αριθμών

Θα χρησιμοποιήσουμε σ' όλα τα παραδείγματα αριθμούς 4 bits για λόγους απλούστευσης. Θα μιλήσουμε μόνο για την πράξη της πρόσθεσης, αφού η αφαίρεση γίνεται με την πρόσθεση στο μειωτέο του αντίθετου αριθμού του αφαιρετέου:

$$(\pm A)-(+B)= (\pm A)+(-B)$$
$$(\pm A)-(-B)= (\pm A)+(+B)$$

Πρόσθεση Αριθμών με την αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου

Για να προσθέσουμε δύο αριθμούς σε αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου εφαρμόζουμε τους κανόνες πρόσθεσης δυαδικών αριθμών, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

+ 5	0101	−5	1101
+ + 2	+ 0010	+ −2	+ 1010
+ 7	0111	−7	1111
(α)		(β)	

$$\begin{array}{rr} & +\ 5 \\ + & -\ 2 \\ \hline & +\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0101 \\ + & 1010 \\ \hline & 0011 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & -\ 5 \\ + & +\ 2 \\ \hline & -\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1101 \\ + & 0010 \\ \hline & 1011 \end{array}$$

(γ) (δ)

Στα παραδείγματα (α) και (β) οι δύο αριθμοί έχουν τα ίδια πρόσημα. Το αποτέλεσμα είναι απλά το άθροισμα των μέτρων τους και το πρόσημο είναι το ίδιο με το πρόσημο των προσθετέων. Στο παράδειγμα (γ) η αφαίρεση 5-2 μετατράπηκε σε πρόσθεση 5+(-2). Το αποτέλεσμα προκύπτει από την αφαίρεση του μικρότερου μέτρου (του 2) από το μεγαλύτερο (του 5) ενώ το πρόσημο θα είναι αυτό του αριθμού με το μεγαλύτερο μέτρο (του 5). Όμοια στο (δ) παράδειγμα αφαιρούμε το μικρότερο μέτρο από το μεγαλύτερο, ενώ το πρόσημο είναι αυτό του αριθμού με το μεγαλύτερο μέτρο.

Είδαμε λοιπόν ότι οι πράξεις αριθμών προσημασμένου μέτρου παρουσιάζουν μια πολυπλοκότητα.

Πρόσθεση Αριθμών με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα

Θα επαναλάβουμε τα ίδια παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα ως προς ένα.

$$\begin{array}{r} +\ 5 \\ +\ +\ 2 \\ \hline +\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 \\ +\ 0010 \\ \hline 0111 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -\ 5 \\ +\ -\ 2 \\ \hline \\ \\ \hline -\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010 \\ +\ 1101 \\ \hline 10111 \\ +\ 1 \\ \hline 1000 \end{array}$$

(ε) (ζ)

$$\begin{array}{r} +\ 5 \\ +\ -\ 2 \\ \hline \\ \\ \hline +\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 \\ +\ 1101 \\ \hline 10010 \\ +\ 1 \\ \hline 0011 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -\ 5 \\ +\ +\ 2 \\ \hline -\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010 \\ +\ 0010 \\ \hline 1100 \end{array}$$

(η) (θ)

Στο παράδειγμα (ε) προσθέτουμε δύο θετικούς αριθμούς και το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το παράδειγμα (α) αφού οι δύο αναπαραστάσεις είναι ίδιες για τους θετικούς αριθμούς. Το παράδειγμα (ζ) δίνει αρχικά ένα διαφορετικό αποτέλεσμα από το (β) και προκύπτει ένα κρατούμενο (carry) από την πρόσθεση. **Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα, όποτε έχουμε κρατούμενο από την πρόσθεση δύο αριθμών το προσθέτουμε στο λιγότερο σημαντικό bit (LSB) του**

αθροίσματος. Το νέο άθροισμα που προκύπτει είναι το σωστό άθροισμα σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα. Κρατούμενο έχουμε και στο παράδειγμα (η) οπότε με την πρόσθεσή του έχουμε το σωστό άθροισμα. Στο τελευταίο παράδειγμα έχουμε σαν αποτέλεσμα 1100 το οποίο είναι το –3 στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα. *Ένας απλός τρόπος για να βρίσκουμε το μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα, είναι να παίρνουμε το συμπλήρωμα όλων των bits του.*

Πρόσθεση Αριθμών με την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο

Οι υπολογισμοί με το συμπλήρωμα ως προς δύο είναι παρόμοιοι με το συμπλήρωμα ως προς ένα με μόνη διαφορά ότι **δεν προσθέτουμε το κρατούμενο** το οποίο μπορεί να προκύψει από την πρόσθεση. Ας δούμε ξανά τα ίδια τέσσερα παραδείγματα χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα ως προς δύο:

+ 5	0101
+ + 2	+ 0010
+ 7	0111

(ι)

– 5	1011
+ – 2	+ 1110
	11001
– 7	1001

(κ)

+ 5	0101
+ – 2	+ 1110
	10011
+ 3	0011

(λ)

– 5	1011
+ + 2	+ 0010
– 3	1101

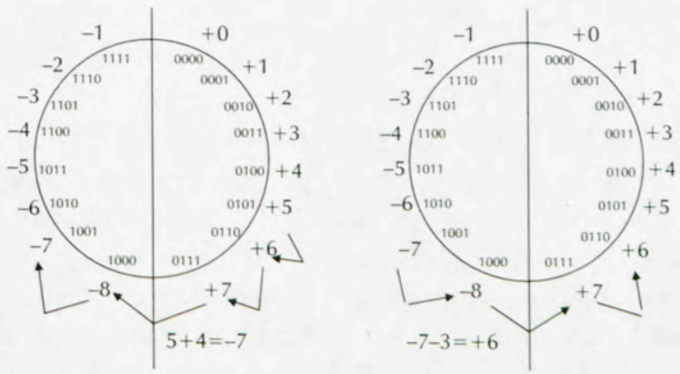
(μ)

Η αφαίρεση γίνεται με την πρόσθεση του αρνητικού αριθμού του αφαιρετέου σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο. Στο παράδειγμα (ι) προσθέτουμε δύο θετικούς αριθμούς και το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το παράδειγμα (ε) αφού οι δύο αναπαραστάσεις είναι ίδιες για τους θετικούς αριθμούς. Με το παράδειγμα (κ) φαίνεται πόσο απλό είναι το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών, ενώ **αν προκύψει κρατούμενο (carry) από την πρόσθεση, το αγνοούμε**. Το νέο άθροισμα που προκύπτει είναι το σωστό άθροισμα σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο και δεν χρειάζεται καμία διόρθωση γιατί έχουμε μία μόνο αναπαράσταση του μηδενός. Κρατούμενο έχουμε και στο παράδειγμα (λ) οπότε αγνοώντας το έχουμε το σωστό άθροισμα. Στο τελευταίο παράδειγμα έχουμε σαν αποτέλεσμα 1101 το οποίο είναι το –3 στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο. *Ένας απλός τρόπος για να βρίσκουμε το μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο, είναι να παίρνουμε το συμπλήρωμα του ως προς δύο.*

Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε τις αναπαραστάσεις ως προς ένα και δύο μεταξύ τους. Για το συμπλήρωμα ως προς δύο το να βρούμε τον αρνητικό ενός αριθμού παρουσιάζει κάποια πολυπλοκότητα, ενώ η πράξη της πρόσθεσης γίνεται απλά. Στο συμπλήρωμα ως προς ένα είναι απλή η διαδικασία της εύρεσης του αρνητικού ενός αριθμού, αλλά η πρόσθεση είναι πιο περίπλοκη. Επειδή έχουμε μία μόνο αναπαράσταση για το μηδέν η αναπαράσταση του συμπληρώματος ως προς δύο χρησιμοποιείται σχεδόν στα περισσότερα ψηφιακά συστήματα.

Υπερχείλιση

Η υπερχείλιση (overflow) συμβαίνει όποτε το άθροισμα δύο θετικών αριθμών δίνει ένα αρνητικό αποτέλεσμα ή όταν το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών δίνει ένα θετικό αποτέλεσμα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον "τροχό των αριθμών" του Σχήματος 9.1.4 για να δείξουμε παραστατικά την υπερχείλιση. Αν σε έναν αριθμό προσθέσουμε ένα θετικό αριθμό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κινούμαστε στον τροχό κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού κατά τόσες θέσεις όσες είναι το μέτρο του. Αν προσθέσουμε έναν αρνητικό αριθμό, κινούμαστε αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Στο σχήμα 9.1.4 χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση του συμπληρώματος ως προς δύο, και μπορούμε να χωρίσουμε τον "τροχό" σε δύο ίσα τμήματα, με το ένα να αναπαριστά τους θετικούς αριθμούς (και το μηδέν), ενώ το άλλο να αναπαριστά τους αρνητικούς αριθμούς. Όταν με την πρόσθεση ή την αφαίρεση διασχίζεται η διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο τμημάτων, τότε έχουμε υπερχείλιση.



Σχήμα 9.1.4 Σχηματική αναπαράσταση των συνθηκών υπερχείλισης

Αυτό φαίνεται με τα δύο παραδείγματα (+5)+(+4) και (−7)+(-3). Στο πρώτο παράδειγμα ξεκινάμε από την θέση που αναπαριστά το +5 και κινούμαστε κατά 4 θέσεις κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός −7, άρα έχουμε υπερχείλιση. Στο δεύτερο παράδειγμα ξεκινάμε από την θέση που αναπαριστά το -7 και κινούμαστε κατά 3 θέσεις κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός +6, άρα έχουμε υπερχείλιση.

Το πρόβλημα της υπερχείλισης στα ψηφιακά συστήματα αντιμετωπίζεται κατ' αρχήν χρησιμοποιώντας για την αποθήκευση του αθροίσματος καταχωρητή μήκους κατά ένα bit τουλάχιστον μεγαλύτερου από το μήκος των προσθετέων. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ειδικά κυκλώματα ανίχνευσης της ύπαρξης υπερχείλισης, η πληροφορία αυτή αποθηκεύεται και χρησιμοποιείται για την σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

9.2 ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΑΘΡΟΙΣΤΩΝ

Σ' αυτή την παράγραφο, θα παρουσιάσουμε τα βασικά κυκλώματα πρόσθεσης δύο bits και πώς τα συνδέουμε για να κατασκευάζουμε κυκλώματα πρόσθεσης αριθμών με πολλά bits.

9.2.1 Ημιαθροιστής

Ο ημιαθροιστής (Half Adder) είναι το πιο βασικό από τα κυκλώματα αρίθμησης. Είναι ένα συνδυαστικό κύκλωμα που εκτελεί την πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων (bits) και έχει δύο εισόδους x (πρώτος προσθετέος) και y (δεύτερος προσθετέος) και δύο εξόδους S (άθροισμα-sum) και C (κρατούμενο-carry).

Ο πίνακας αληθείας του ημιαθροιστή είναι:

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Οι έξοδοι μπορούν να εκφραστούν ως λογικές συναρτήσεις των μεταβλητών εισόδου:

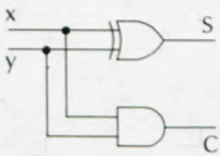
$$S = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} = x \oplus y$$

$$C = x \cdot y$$

Ο ημιαθροιστής μπορεί να υλοποιηθεί με τις ακόλουθες πύλες:

- ✔ μία πύλη XOR
- ✔ μία πύλη AND

όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.2.1.



Σχήμα 9.2.1 *Κύκλωμα Ημιαθροιστή*

9.2.2 Πλήρης Αθροιστής

Ο πλήρης αθροιστής (Full Adder) είναι ένα συνδυαστικό κύκλωμα που εκτελεί την πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων (bits) λαμβάνοντας υπόψη τυχόν κρατούμενο εισόδου (Cin). Έχει τρεις εισόδους x (πρώτος προσθετέος), y (δεύτερος προσθετέος) και z (κρατούμενο εισόδου) και δύο εξόδους S (άθροισμα-sum) και C (κρατούμενο εξόδου).

Ο πίνακας αληθείας του πλήρη αθροιστή είναι ο ακόλουθος:

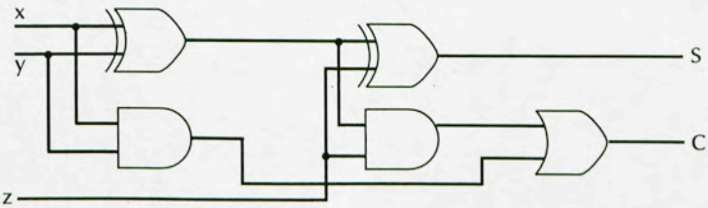
x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Οι έξοδοι μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις Boole των μεταβλητών εισόδου:

$$S = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z =$$
$$= (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot z) =$$
$$= (\overline{x} \cdot y + \overline{x} \cdot y) \cdot \overline{z} + (\overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y) \cdot z =$$
$$= (x \oplus y) \cdot \overline{z} + \overline{(x \oplus y)} \cdot z = (x \oplus y) \oplus z$$

$$C = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z = (\overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z) + (x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z) =$$
$$= (\overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}) \cdot z + x \cdot y \cdot (\overline{z} + z) = (x \oplus y) \cdot z + x \cdot y \cdot 1 =$$
$$= (x \oplus y) \cdot z + x \cdot y$$

Ο πλήρης αθροιστής μπορεί να υλοποιηθεί με:



- ✔ δύο ημιαθροιστές
- ✔ μία πύλη OR

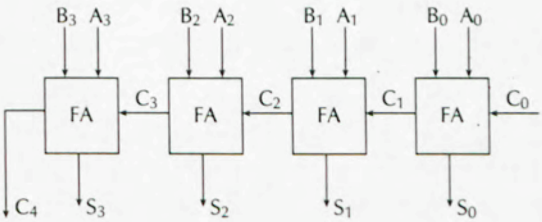
όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.2.2.

Σχήμα 9.2.2 *Κύκλωμα Πλήρους Αθροιστή*

9.2.3 Παράλληλος Δυαδικός Αθροιστής

Στην παράλληλη πρόσθεση δύο **μη προσημασμένων** n-bits δυαδικών αριθμών A και B, τα bits ίδιας τάξης (βάρους) των δύο αριθμών προστίθενται παράλληλα (ταυτόχρονα) χρησιμοποιώντας n πλήρεις αθροιστές.

Στο Σχήμα 9.2.3 παρουσιάζεται ένας Παράλληλος Αθροιστής τεσσάρων bits που αποτελείται από 4 Πλήρεις Αθροιστές (FA). Οι αριθμοί A3A2A1A0 και B3B2B1B0 προστίθενται δίνοντας άθροισμα S3S2S1S0 και κρατούμενο εξόδου C4. Το αρχικό κρατούμενο εισόδου είναι C0=0. Το κρατούμενο εξόδου του κάθε πλήρους αθροιστή (C1,C2,C3) αποτελεί το κρατούμενο εισόδου του επομένου του.

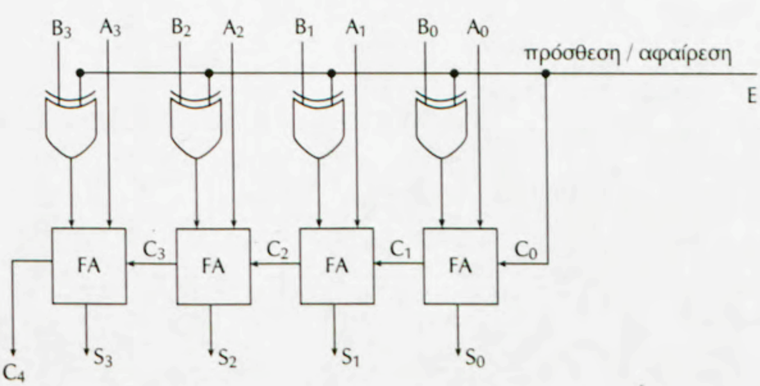


Σχήμα 9.2.3 *Κύκλωμα παράλληλου δυαδικού αθροιστή τεσσάρων bits*

9.2.4 Παράλληλος Δυαδικός Αθροιστής-Αφαιρέτης

Στο Σχήμα 9.2.4 παρουσιάζεται ένας Παράλληλος Αθροιστής-Αφαιρέτης τεσσάρων bits. Οι **μη προσημασμένοι** 4-bits δυαδικοί αριθμοί A=A3A2A1A0 και B=B3B2B1B0 προστίθενται (A+B) ή αφαιρούνται (A-B) δίνοντας αποτέλεσμα C4S3S2S1S0.

Στο κύκλωμα υπάρχει μία είσοδος ελέγχου E Πρόσθεσης/Αφαίρεσης. Όταν αυτή η είσοδος είναι "0", τότε το κύκλωμα λειτουργεί ως αθροιστής. Όταν είναι "1" τότε λειτουργεί ως αφαιρέτης.



Σχήμα 9.2.4 *Κύκλωμα παράλληλου δυαδικού αθροιστή/αφαιρέτη τεσσάρων bits*

Η είσοδος Πρόσθεσης/Αφαίρεσης τροφοδοτεί την είσοδο κρατουμένου του πλήρους αθροιστή της χαμηλότερης βαθμίδας (LSB) και την μία από τις εισόδους των πυλών XOR. Η δεύτερη είσοδος των πυλών XOR οδηγείται από τα bits του αριθμού B.

Όταν E=0, τότε οι πλήρεις αθροιστές δέχονται τα bits του αριθμού B ως έχουν, το κρατούμενο εισόδου είναι C0=0 και εκτελείται η πράξη A+B. Το C4 μας δίνει το κρατούμενο της πρόσθεσης.

Όταν E=1, τότε οι πλήρεις αθροιστές δέχονται τα bits του αριθμού B σε συμπληρωματική μορφή, το κρατούμενο εισόδου είναι C0=1 (άρα στον A προστίθεται ο αντίθετος του B σε συμπλήρωμα ως προς δύο) και εκτελείται η πράξη A-B. Αν A>=B (C4=1) τότε, το αποτέλεσμα είναι S3S2S1S0. Αν A<B (C4=0), τότε το αποτέλεσμα είναι αρνητικό με μέτρο το συμπλήρωμα ως προς 2 του S3S2S1S0.

9.3 Αθροιστής BCD

Ο κώδικας BCD (Binary Coded Decimal) αναπαριστά τα 10 δεκαδικά ψηφία με δυαδικούς αριθμούς τεσσάρων bits. Τα δεκαδικά ψηφία από 0 έως 9 αναπαρίστανται με τις ακολουθίες των δυαδικών ψηφίων από 0000 έως 1001. Οι υπόλοιποι συνδυασμοί από 1010 έως 1111 δε χρησιμοποιούνται.

Όπως και στο δεκαδικό σύστημα η πρόσθεση σε BCD γίνεται με ένα δεκαδικό ψηφίο τη φορά ξεκινώντας από τα λιγότερα σημαντικά ψηφία των αριθμών. Το σημείο το οποίο χρειάζεται προσοχή είναι, όταν το άθροισμα δύο BCD ψηφίων ξεπερνά τον αριθμό 1001 (9_{10}). Καλύτερα να δούμε αυτό το σημείο με τα παραδείγματα που ακολουθούν.

$$\begin{array}{rcr} & & \text{BCD} \\ 5 & & 0101 \\ +\ 3 & & +\ 0011 \\ \hline 8 & & 1000 \end{array}$$

Στο πρώτο παράδειγμα βλέπουμε πως δεν υπάρχει πρόβλημα

$$\begin{array}{rcrcc} & & \text{BCD} & & \\ 7 & & 0111 & & \\ +\ 5 & & +\ \ 0101 & & \\ \hline 12 & & 1100 & & \textbf{Λάθος BCD!} \\ & & +\ \ 0110 & & \text{Προσθέτουμε 6} \\ \hline & & 0001\ 0010 & & \text{Σωστό BCD 12} \end{array}$$

Στο δεύτερο παράδειγμα βλέπουμε πως το άθροισμα αρχικά είναι $1100_2=12_{10}$, το οποίο είναι σωστό ως αποτέλεσμα αθροίσματος στο δυαδικό σύστημα, αλλά όχι στον BCD κώδικα. Υπάρχει ένας απλός τρόπος **διόρθωσης με την πρόσθεση του αριθμού 6 (0110_2)** στο ψηφίο του αθροίσματος που είναι μεγαλύτερο από 9.

Ας δούμε τώρα και ένα παράδειγμα διόρθωσης με την άθροιση δύο διψήφιων BCD αριθμών:

	BCD		
35	0011	0101	
+ 26	+ 0010	0110	
61	0101	1011	Λάθος BCD!
	+ 0000	0110	Προσθέτουμε 6
	0110	0001	Σωστό BCD 61

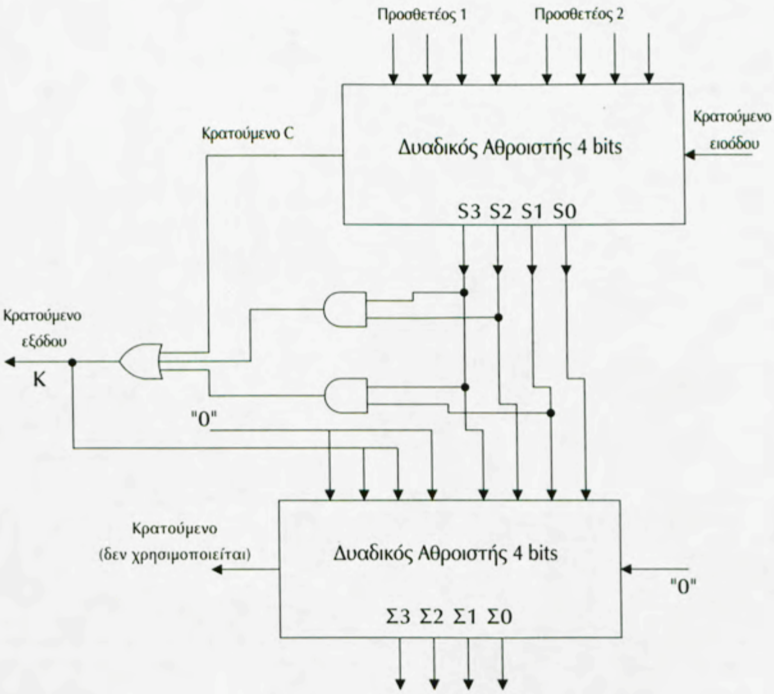
Πίνακας 9.3.1 *Άθροιση BCD*

Δυαδικό Άθροισμα					Άθροισμα BCD					
C	S3	S2	S1	S0	K	Σ3	Σ2	Σ1	Σ0	Δεκαδικός
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	6
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	7
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	9
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	10
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	11
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	12
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	13
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	14
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	15
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	16
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	17
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	18
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	19

Βλέπουμε πως με την πρόσθεση του αριθμού 6 διορθώνουμε το αποτέλεσμα. Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ χρήσιμη για την κατασκευή ενός BCD αθροιστή χρησιμοποιώντας δυαδικούς αθροιστές των 4 bits. Η διόρθωση με την πρόσθεση του αριθμού 6 προκύπτει λόγω του ότι δεν χρησιμοποιούμε τους 6 δυαδικούς αριθμούς των τεσσάρων bits από 1010 έως 1111. Αυτό φαίνεται καλύτερα και στον πίνακα 9.3.1 για το άθροισμα δύο BCD αριθμών, όπου αριστερά είναι το αποτέλεσμα στο δυαδικό σύστημα μαζί με το κρατούμενο, ενώ δεξιά είναι ο σωστός BCD αριθμός (με το κρατούμενο που μπορεί να προκύψει) ο οποίος προκύπτει αρκεί να προσθέσουμε τον αριθμό 6 σε κάθε δυαδικό άθροισμα μεγαλύτερο του 1001.

Στο Σχήμα 9.3.1 φαίνεται ο BCD αθροιστής με τη χρήση δύο παράλληλων δυαδικών αθροιστών των 4 bits. Ο BCD αθροιστής έχει εισόδους το κρατούμενο εισόδου που είναι το κρατούμενο εξόδου της προηγούμενης βαθμίδας και τους BCD προσθετέους και εξόδους το κρατούμενο K και το άθροισμα Σ3Σ2Σ1Σ0.

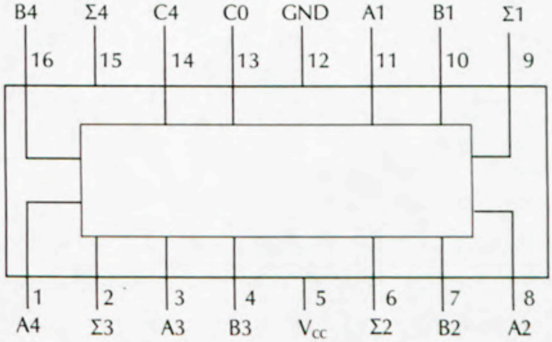
Όταν K=1 το αποτέλεσμα S3S2S1S0 θα πρέπει να διορθωθεί ώστε να προκύψει το σωστό άθροισμα BCD με την πρόσθεση του αριθμού 6. Το κρατούμενο K είναι "1" όταν το άθροισμά S3S2S1S0 είναι μεγαλύτερο από 9 (1001), οπότε είτε C=1, είτε S3=S2=1, είτε S3=S1=1. Με τις πύλες AND παίρνουμε τους όρους S3·S2 και S3·S1. Με την πύλη OR τριών εισόδων προκύπτει η λογική συνάρτηση του κρατουμένου K=C+S3·S2+S3·S1 την έξοδο της οποίας χρησιμοποιούμε για να προσθέσουμε τον αριθμό 6 (0110) στον δεύτερο αθροιστή. Αν K=0, τότε ο δεύτερος αθροιστής προσθέτει στον S3S2S1S0 τον αριθμό 0 (0000) και επομένως δεν αλλάζει το άθροισμα.



Σχήμα 9.3.1 BCD Αθροιστής

9.4 ΔΥΑΔΙΚΟΣ ΑΘΡΟΙΣΤΗΣ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΚΥΚΛΩΜΑ

Οι αθροιστές είναι διαθέσιμοι σε ολοκληρωμένη μορφή. Το Ο.Κ. 7483 είναι ένας παράλληλος δυαδικός αθροιστής 4-bits και παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.4.1. Το Ο.Κ. έχει εισόδους τους προσθετέους A=A4A3A2A1 και B=B4B3B2B1 των 4 bits και το κρατούμενο εισόδου C0 και εξόδους το κρατούμενο εξόδου C4 και τα τέσσερα bits αθροίσματος Σ4Σ3Σ2Σ1. Αν C0=0, τότε εκτελείται η πρόσθεση A+B. Αν C0=1, τότε εκτελείται η πρόσθεση A+B+1.



Σχήμα 9.4.1 Το ολοκληρωμένο 7483

9.5 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Σε όλα τα ψηφιακά συστήματα οι θετικοί ακέραιοι αναπαρίστανται με τον ίδιο τρόπο. Η διαφορά υπάρχει στην αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών. Τρεις είναι οι βασικές αναπαραστάσεις των προσημασμένων δυαδικών αριθμών: α) προσημασμένο μέτρο, β) συμπλήρωμα ως προς ένα και γ) το συμπλήρωμα ως προς δύο.
2. Στην Αναπαράσταση Προσημασμένου Μέτρου, το περισσότερο σημαντικό bit χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει το πρόσημο του αριθμού, ενώ τα υπόλοιπα bits αναπαριστούν την απόλυτη τιμή του (το μέτρο του). Αν το bit του πρόσημου είναι 0, τότε ο αριθμός είναι θετικός. Αν το bit του πρόσημου είναι 1, τότε ο αριθμός είναι αρνητικός.
3. Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα οι θετικοί αριθμοί (και το μηδέν) αναπαρίστανται όπως και στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

Οι αρνητικοί αριθμοί αναπαρίστανται με το συμπλήρωμα ως προς ένα των αντίστοιχων θετικών αριθμών. Το συμπλήρωμα ως προς ένα ενός αριθμού προκύπτει με την αντικατάσταση κάθε bit του αριθμού με το συμπλήρωμά του.

4. Στην αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο οι θετικοί αριθμοί έχουν 0 στο πρόσημό τους και ακολουθούνται από το μέτρο τους. Οι αρνητικοί αριθμοί αναπαρίστανται με το συμπλήρωμα ως προς δύο των αντίστοιχων θετικών αριθμών. Το συμπλήρωμα ως προς δύο ενός αριθμού υπολογίζεται προσθέτοντας το 1 στο συμπλήρωμα ως προς ένα του αριθμού.
5. Ο ημιαθροιστής και ο πλήρης αθροιστής αποτελούν τη βάση σε όλα τα αριθμητικά κυκλώματα. Ο ημιαθροιστής είναι ένα συνδυαστικό κύκλωμα που εκτελεί την πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων που τοποθετούμε στις δύο εισόδους του, ενώ στις εξόδους του δίνει το άθροισμά τους και το κρατούμενο εξόδου.

   Ο πλήρης αθροιστής είναι ένα συνδυαστικό κύκλωμα που εκτελεί την πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων καθώς και του κρατούμενου εισόδου, ενώ στις εξόδους του δίνει το άθροισμά τους και το κρατούμενο εξόδου.
6. Το άθροισμα δύο δυαδικών αριθμών N bits μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας N πλήρεις αθροιστές κατασκευάζοντας έναν παράλληλο δυαδικό αθροιστή. Η άθροιση των bits ίδιας τάξης γίνεται ταυτόχρονα (παράλληλα) σε όλους τους αθροιστές.
7. Ο δυαδικός αθροιστής/αφαιρέτης κατασκευάζεται με έναν παράλληλο δυαδικό αθροιστή και ένα συνδυαστικό κύκλωμα με το οποίο επιλέγεται η λειτουργία της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης.
8. Οι αθροιστές BCD κατασκευάζονται από δύο παράλληλους δυαδικούς αθροιστές και ένα συνδυαστικό κύκλωμα διόρθωσης του αποτελέσματος.

9.6 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το συμπλήρωμα ως προς ένα και δύο των αριθμών 4 bits: 0011, 0010, 1100, 1111. Θεωρώντας τα αποτελέσματά σας προσημασμένους αριθμούς σε συμπλήρωμα ως προς ένα και δύο αντίστοιχα, να δώσετε τους ισοδύναμους προσημασμένους δεκαδικούς αριθμούς.

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για την αναπαράσταση προσημασμένων αριθμών 4 bits.

Δεκαδικός	Συμπλήρωμα ως προς 2	Συμπλήρωμα ως προς 1	Αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου
-8	1000	–	–
-7	1001	1000	1111
-6			
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0	0000	1111 ή 0000	1000 ή 0000
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7	0111	0111	0111

3. Να εκτελέσετε τις παρακάτω δυαδικές προσθέσεις θεωρώντας ότι οι αριθμοί είναι σε αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου. Να δώσετε τα αποτελέσματα και στο δεκαδικό σύστημα με πρόσημο.
   α. 0001+0101
   β. 0100+1111
   γ. 0011+1100
   δ. 1010+1100

4. Να εκτελέσετε τις πράξεις της άσκησης 5 θεωρώντας ότι οι αριθμοί είναι σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς ένα.

5. Να εκτελέσετε τις πράξεις της άσκησης 5 θεωρώντας ότι οι αριθμοί είναι σε αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο.

6. Να βρείτε τα συμπληρώματα ως προς ένα και δύο των ακόλουθων αριθμών των 8 bits:
   00101011, 10000000, 01111111, 00000000

7. Ποιες από τις παρακάτω δυαδικές προσθέσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.
   α. 0001+0101=0110 ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

β. 0100+1111=1000 ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐
γ. 0011+1100=1111 ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐
δ. 1010+1100=1100 ΣΩΣΤΟ ☐ ΛΑΘΟΣ ☐

8. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς δύο να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις στο δυαδικό σύστημα με μήκος λέξης για τους προσημασμένους αριθμούς 4 bits:
   α. (+4) + (+2)
   β. (+4) – (+2)
   γ. (–4) + (–2)
   δ. (–4) – (–2)

9. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός και ο μικρότερος αρνητικός αριθμός στο δεκαδικό σύστημα που μπορεί να αναπαρασταθεί με αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2 και μήκος λέξης 3 bits;

10. Ποια η διαφορά μεταξύ του ημιαθροιστή και του πλήρους αθροιστή;

11. Να σχεδιάσετε έναν ημιαθροιστή με εισόδους x=y=A και εξόδους S (άθροισμα) και C (κρατούμενο). Να γράψετε τον πίνακα αληθείας του κυκλώματος.

12. Να εκτελέστε τις ακόλουθες προσθέσεις των BCD αριθμών:
   α. 0001+0011
   β. 0010+0110
   γ. 0111+0100
   δ.10011001+00000001
   Να δώσετε τα αποτελέσματα και στο δεκαδικό σύστημα.