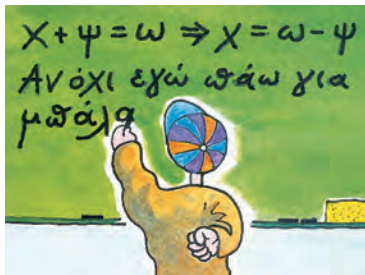


## 1.3. Επίλυση τύπων



Ο *Anders Celsius*, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας.

Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο *Magnus Celsius*, μαθηματικός και ο *Anders Spole*, αστρονόμος. Ο πατέρας του *Nils Celsius* ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας. Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας.

Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Τορνεα, στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του *Lapland*"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθηση του *Newton*, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος.

Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του.

Μετά το θάνατό του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.

Σε πολλές επιστήμες χρησιμοποιούμε ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους μεγέθη. Για παράδειγμα:

Στη Φυσική ο όγκος  $V$  με τη μάζα  $m$  και την πυκνότητα  $\rho$  συνδέονται με τον τύπο  $m = \rho \cdot V$ .

Στη Γεωμετρία ο όγκος  $V$  ενός παραλληλεπίπεδου δίνεται από τον τύπο  $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ , όπου  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι οι τρεις διαστάσεις του.

Στις τραπεζικές συναλλαγές ο τόκος ενός δανείου δίνεται από τον τύπο  $T = \frac{K \cdot E \cdot t}{100}$ , όπου  $K$  το κεφάλαιο,  $t$  ο χρόνος

διάρκειας του δανείου και  $E$  το επιτόκιο της τράπεζας.

Όταν έχουμε έναν τύπο στον οποίο γνωρίζουμε τις τιμές που παίρνουν όλες οι μεταβλητές του εκτός από μία, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της άγνωστης μεταβλητής. Αυτό γίνεται, αν επιλύσουμε τον τύπο ως προς την άγνωστη μεταβλητή.

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στις Αγγλοσαξονικές χώρες (κυρίως στις ΗΠΑ) για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Φαρενάιτ ( $^{\circ}\text{F}$ ). Στον υπόλοιπο κόσμο όμως -όπως και στη χώρα μας- χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ).

Η σχέση που συνδέει τους  $^{\circ}\text{F}$  και τους  $^{\circ}\text{C}$ , είναι:  **$F = 1,8C + 32$**

α) Ένας Αμερικανός που θέλει να ταξιδέψει στην Ελλάδα πληροφορείται ότι, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία  $20^{\circ}\text{C}$ . Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε  $^{\circ}\text{F}$ ;

β) Ένας Έλληνας που θέλει να ταξιδέψει στη Νέα Υόρκη πληροφορείται ότι, εκεί έχει θερμοκρασία  $41^{\circ}\text{F}$ . Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε  $^{\circ}\text{C}$ ;

### Λύση

α) Όταν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία σε  $^{\circ}\text{C}$ , είναι εύκολο να βρούμε την αντίστοιχη θερμοκρασία σε  $^{\circ}\text{F}$ , γιατί ο τύπος  **$F = 1,8C + 32$**  "λειτουργεί αμέσως" (είναι λυμένος, όπως λέμε, ως προς  $F$ ).

– Για  $C = 20$  είναι:

$$F = 1,8 \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$$

Άρα, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία  $68^{\circ}\text{F}$ .

β) Όταν θέλουμε να μετατρέψουμε  $^{\circ}\text{F}$  σε  $^{\circ}\text{C}$ , τα πράγματα με τον τύπο  **$F = 1,8C + 32$**  είναι λίγο πιο δύσκολα:

– Για  $F = 41$  είναι  $41 = 1,8C + 32$  και στη συνέχεια πρέπει να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς  $C$ :

$$\begin{aligned}
 41 - 32 &= 1,8C \\
 9 &= 1,8C \\
 \frac{9}{1,8} &= \frac{1,8C}{1,8} \\
 5 &= C
 \end{aligned}$$

Άρα, στη Νέα Υόρκη έχει θερμοκρασία  $5^{\circ}\text{C}$ .

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Να μετατρέψετε σε βαθμούς Κελσίου τις θερμοκρασίες τριών ακόμα Αμερικανικών πόλεων:

Βοστώνη:  $23^{\circ}\text{F}$

Βαλτιμόρη:  $32^{\circ}\text{F}$

Λος Άντζελες:  $59^{\circ}\text{F}$

### Λύση

Θα πρέπει, βέβαια, να λύσουμε τρεις εξισώσεις όπως η παραπάνω! **Αντί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία τρεις φορές, λύνουμε πρώτα τον τύπο  $F = 1,8C + 32$  ως προς  $C$ :**

$$F - 32 = 1,8C \quad \text{ή} \quad \frac{F - 32}{1,8} = \frac{1,8C}{1,8}$$

$$\text{Άρα: } C = \frac{F - 32}{1,8}.$$

Ο τύπος  $C = \frac{F - 32}{1,8}$  είναι ίδιος (ισοδύναμος) με τον τύπο  $F = 1,8C + 32$ , μόνο που «είναι λυμένος» ως προς  $C$ .

Επομένως:

- για  $F = 23$  είναι  $C = \frac{23 - 32}{1,8} = \frac{-9}{1,8} = -5$

- για  $F = 32$  είναι  $C = \frac{32 - 32}{1,8} = \frac{0}{1,8} = 0$

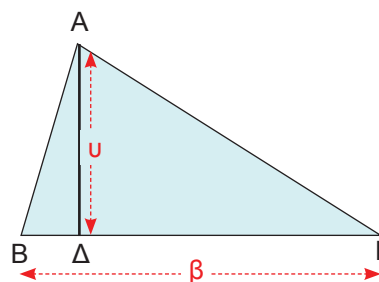
- για  $F = 59$  είναι  $C = \frac{59 - 32}{1,8} = \frac{27}{1,8} = 15$

Διαπιστώσαμε ότι, αν έχουμε μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, μπορούμε (χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που μάθαμε στις εξισώσεις) να λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς μία μεταβλητή.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση  $\beta$  και ύψος  $u$ , γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{1}{2}\beta u$ . Να λύσετε τον τύπο αυτόν ως προς  $\beta$  και ως προς  $u$ . Στη συνέχεια να βρείτε:

- Το ύψος ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν  $12 \text{ cm}^2$  και βάση  $4 \text{ cm}$ .
- Τη βάση ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν  $35 \text{ cm}^2$  και ύψος  $7 \text{ cm}$ .



**Λύση:** Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών:  $2E = 2 \cdot \frac{1}{2}\beta u$ .  
Άρα:  $2E = \beta u$ .

Για να λύσουμε ως προς  $\beta$ , διαιρούμε και τα δύο μέλη με το  $u$ , οπότε:  $\beta = \frac{2E}{u}$ .

Για να λύσουμε ως προς  $u$ , διαιρούμε και τα δύο μέλη με το  $\beta$ , οπότε:  $u = \frac{2E}{\beta}$ .

α) Από τον τύπο  $u = \frac{2E}{\beta}$  για  $E = 12$  και  $\beta = 4$  έχουμε:  $u = \frac{2E}{\beta} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$  (cm).

β) Από τον τύπο  $\beta = \frac{2E}{u}$  για  $E = 35$  και  $u = 7$  έχουμε:  $\beta = \frac{2E}{u} = \frac{2 \cdot 35}{7} = \frac{70}{7} = 10$  (cm).



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

	A	B	Γ	Δ
1. Η σχέση $3\alpha = \beta\gamma$ , αν λυθεί ως προς $\alpha$ , γίνεται:	$\alpha = \beta\gamma - 3$	$\alpha = 3\beta\gamma$	$\alpha = \frac{\beta\gamma}{3}$	$4x$
2. Η σχέση $\alpha = \beta + \gamma\delta$ , αν λυθεί ως προς $\beta$ , γίνεται:	$\beta = \gamma\delta - \alpha$	$\beta = \alpha - \gamma\delta$	$\beta = \frac{\alpha}{\gamma\delta}$	$\beta = \frac{\gamma\delta}{\alpha}$
3. Η σχέση $\alpha = \beta + \gamma\delta$ , αν λυθεί ως προς $\gamma$ , γίνεται:	$\gamma = \alpha - \beta - \delta$	$\gamma = \frac{\alpha}{\beta} - \delta$	$\gamma = \frac{\alpha - \beta}{\delta}$	$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$
4. Η σχέση $\alpha = \beta\left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right)$ , αν λυθεί ως προς $\gamma$ , γίνεται:	$\gamma = \frac{(\alpha - \beta)\delta}{\beta}$	$\gamma = (\alpha - \beta)\delta$	$\gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta}$	$\gamma = (\alpha - \beta - 1)\delta$



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους των Μαθηματικών και της Φυσικής ως προς τη μεταβλητή που ζητείται:

1 Μήκος κύκλου:

$$L = 2\pi r, \text{ ως προς } r.$$

2 Περίμετρος ορθογωνίου:

$$P = 2x + 2y, \text{ ως προς } y.$$

3 Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου:  $E = 2\pi ru$ , ως προς  $r$ .

4 Εξίσωση ευθείας:

$$ax + \beta y + \gamma = 0, \text{ ως προς } y, \text{ με } \beta \neq 0$$

5 Εμβαδόν παραλληλεπιπέδου:

$$E = 2(xy + y\omega + x\omega) \text{ ως προς } \omega.$$

6 Ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση:  $u = \frac{S}{t}$  ως προς  $t$ .

7 Εμβαδόν τραπεζίου:

$$E = \left(\frac{\beta + B}{2}\right)u, \text{ ως προς } \beta.$$

8  $S = \frac{\alpha}{1 - \lambda}$ , ως προς  $\lambda$ .

9  $P = P_0 + \epsilon h$ , ως προς  $h$ .

10  $Q = mc\theta$ , ως προς  $c$ .

11  $F = k_c \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ , ως προς  $q_1$ .

12  $S = u_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ , ως προς  $u_0$ .

- 13** Για ένα ιδεώδες αέριο σε κανονική πίεση, ο όγκος του σε θερμοκρασία  $\theta$  °C δίνεται από τον τύπο:

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{\theta}{273,15} \right),$$

όπου  $V_0$  ο όγκος στους 0 °C.

- α) Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς  $\theta$ .  
 β) Στους 0°C ένα ιδεώδες αέριο έχει όγκο  $V_0 = 25 \text{ cm}^3$ . Σε ποια θερμοκρασία έχει όγκο  $30 \text{ cm}^3$ ;
- 14** Εμπειρικές μελέτες για τη χιονόπτωση στη Βρετανία κατέληξαν στο εξής συμπέρασμα: ο αριθμός  $D$  των ημερών ενός έτους στη διάρκεια των οποίων

πέφτει χιόνι, δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

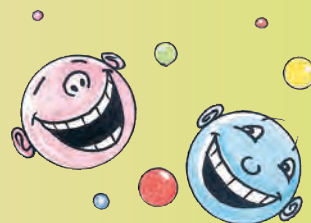
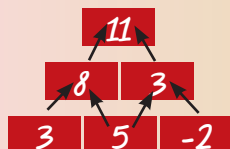
$D = 0,155 \cdot h + 11$ ,  
 όπου  $h$  είναι το υψόμετρο ενός τόπου σε μέτρα.

- α) Σύμφωνα με αυτό τον τύπο, πόσες ημέρες χιονίζει σε έναν τόπο που είναι παραθαλάσσιος ( $h = 0$ );  
 β) Σε ποιο υψόμετρο χιονίζει 6 μήνες το χρόνο (180 ημέρες) και σε ποιο υψόμετρο χιονίζει κάθε ημέρα;



### ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στην παρακάτω πυραμίδα κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από κάτω του, όπως φαίνεται στο παράδειγμα.



Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό  $x$  στις παρακάτω πυραμίδες;

